Lineare Algebra II, SS08, Blatt 2: Musterloesung:

1. Aufgabe:

(a)

$$\beta(v,w) \;=\; v‘Aw \quad mit \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Also bzgl. der Notation: $C_S^B(\vec{v})_B = (\vec{v})_S$ .... :—

$$C_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad C_S^B‘ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_B = C_S^B‘\; A_S\; C_S^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

(c) Offenbar gilt $Det(A_S) = -3$. Für eine beliebige andere Basis T gilt:

$A_T = C_S^T‘\; A_S\; C_S^T \Rightarrow Det(A_T) = Det(C_S^T‘\; A_S\; C_S^T) = Det(C_S^T‘)\cdot Det(A_S)\cdot Det(C_S^T) = Det(C_S^T)^2\cdot Det(A_S) = -3\cdot c^2$

mit $c^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow Det(A_T) < 0\ \forall T \Rightarrow A_T \neq Id$
Es gibt also keine Basis, so dass die Strukturmatrix bzgl dieser die Einheitsmatrix ist. $\square$

2. Aufgabe:

(a) **Beh.:** H ist ein Untervektorraum von V.
Bew.: Seien $v, v' \in H, c \in K$.
$\forall w \in W : \beta(v+v', w) = \beta(v,w) + \beta(v',w) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v + v' \in H$
$\forall w \in W : \beta(c\cdot v, w) = c \cdot \beta(v,w) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow c\cdot v \in H$
$\forall w \in W : \beta(0,w) = 0 \Rightarrow 0 \in H$
$\Rightarrow H \leq V$ Untervektorraum. $\square$

Beh.: $H = \{0\} \Leftrightarrow \beta$ ist nicht ausgeartet in der ersten Variable.
Bew.: $H = \{0\} \Leftrightarrow [\beta(v,w) = 0\ \forall w \in W \Rightarrow v = 0] \Leftrightarrow \beta$ ist nicht ausgeartet in der ersten Variable. $\square$

(b) **Beh.:** $(\cdot,\cdot)$ ist nicht ausgeartet.
Bew.: Sei $v \in V \setminus \{0\}$ und $i \in \{1,\ldots,n\}$ mit $v_i \neq 0$. $\Rightarrow (v, e_i) = v_i \neq 0$
$\Rightarrow (\cdot,\cdot)$ ist nicht ausgeartet in der ersten Variable.
Analog: $(\cdot,\cdot)$ ist nicht ausgeartet in der zweiten Variable. $\square$

3. Aufgabe:

(a) $f \neq 0 \Rightarrow \exists \vec{v} \in V : f(\vec{v}) \neq 0 \Rightarrow Rang(f) >= 1unddaDim(K) = 1auchRang(f) = 1$
Mit Dimensionsformel: $Defekt(f) = Dim(V) - Rang(f) = n - Rang(f) = n - 1$
Mit Basisergaenzungssatz: $V = Kern(f) \oplus W \quad mit \quad Dim(W) = 1 \Rightarrow W =< \vec{w} > \quad mit \quad \vec{w} \in V$ $\square$

(b) **Beh.:** $f = \alpha g \Rightarrow Kern(f) = Kern(g)$
Bew.: $\vec{v} \in Kern(f) \Leftrightarrow f(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow g(\vec{v}) = (\alpha f)(\vec{v}) = \alpha f(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \in Kern(g)$ $\square$

Beh.: $Kern(f) = Kern(g) \Rightarrow \exists \alpha :\ f = \alpha g$
Bew.: Waehle nach (a): $\vec{v} \in V$ mit $V = Kern(f) \oplus < \vec{v} >= Kern(g) \oplus < \vec{v} >$
$\Rightarrow f(\vec{v}) \neq 0 \wedge g(\vec{v}) \neq 0 \Rightarrow \exists \gamma : f(\vec{v}) = \gamma g(\vec{v})$
$\forall \vec{x} \in V : \vec{x} = \alpha \cdot \vec{k} + \beta \cdot \vec{v}\ \ (\vec{k} \in Kern(f))$
$f(\vec{x}) = f(\alpha\cdot\vec{k} + \beta\cdot\vec{v}) = \alpha f(\vec{k}) + \beta f(\vec{v}) = \beta f(\vec{v}) = \beta\gamma g(\vec{v}) = \beta\gamma g(\vec{v}) + \alpha\gamma\cdot 0 = \beta\gamma g(\vec{v}) + \alpha\gamma g(\vec{k}) =$
$\gamma g(\alpha\vec{k} + \beta\vec{v}) = \gamma g(\vec{x}) \Rightarrow f = \gamma g \quad$ Waehle $\alpha = \gamma$ $\square$

(c) V endlich dimensional $\Leftrightarrow \exists_{i=1}^n \vec{e}_i$ mit e_i linear unabhängig
Beh. 1: $\forall \vec{e}_i \neq \vec{e}_j \exists f, g \in W : f(\vec{e}_i) \neq f(\vec{e}_i) \wedge g(\vec{e}_i) \neq g(\vec{e}_j) \wedge \Big(\nexists \alpha \in K : f(\vec{e}_i) = \alpha g(\vec{e}_j) \wedge g(\vec{e}_i) = \alpha g(\vec{e}_j)\Big)$
Bew. : (durch Widerspruch). f und g welche $f(\vec{e}_i) \neq f(\vec{e}_j) \wedge g(\vec{e}_i) \neq g(\vec{e}_j)$ erfuellen existieren nach Voraussetzung.
Annahme: $\exists \alpha \forall f \in W : f(\vec{e}_i) = \alpha f(\vec{e}_j) \Rightarrow \forall f \in W : f(\alpha\vec{e}_i - \vec{e}_j) = 0 = f(\vec{0})\ aber\ \alpha\vec{e}_i - \vec{e}_j \neq \vec{0}$ $\lightning$
Beh. 2: $\forall \vec{e}_i \neq \vec{e}_j$ mit $i, j < n\ \exists f \in W : f(\vec{e}_i) \neq f(\vec{e}_j) \wedge f(\vec{e}_n) = 0$
Bew.: Wähle f, g gemaeß Beh. 1: Falls $f(\vec{e}_n) \neq 0 \wedge g(\vec{e}_n) \neq 0$ setze $h = f - \frac{f(\vec{e}_n)}{g(\vec{e}_n)} \cdot g$ $\square$

$\Rightarrow$ W enthaelt Teilmenge $W_n = \{f \in W : f(\vec{e}_n) = 0\}$ so dass:
$\forall f \in W_n : f(\vec{e}_n) = 0$ und W_n trennt immer noch die Punkte $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$
Beh. 3: W_n trennt die Punkte $\{\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2, \vec{0}\}$
Bew.: Mit $\{\vec{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ ist auch $\{\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ Basis von V und Beh. 1 und 2 treffen zu.
Es gibt also 2 lin. unabhaengige Funktionen, die $\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2$ und $\vec{0}$ trennen. □
Damit erfüllt W_n wieder die Voraussetzungen an W in Behauptung 1 und 2.
Per Induktion enthaelt W Teilmengen W_i $(1 \leq i \leq n)$ so dass:
$\forall f \in W_i, j > i : f(\vec{e}_j) = 0$ und W_i trennt die Punkte $\{e_1, ...e_i\}$
$\Rightarrow \exists f \in W_1 \leq W : f(\vec{e}_i) = \delta_{1,i}$
Durch umnumerieren folgt: $\forall i\ \exists f_i \in W : f_i(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$
Diese f_i sind offenbar linear unabhängig
$\Rightarrow Dim(W) = n = Dim(V) = Dim(V^*) \wedge W \leq V^*$
$\Rightarrow W = V^*$ □

4. Aufgabe:

(a) **Beh.:** $({}^t\beta)_1 = \beta_2$
Bew.: ${}^t\beta : W \times V \to K, (w, v) \mapsto \beta(v, w)$.
Sei $w \in W$. $\Rightarrow ({}^t\beta)_1(w) = {}^t\beta(w, \cdot) = \beta(\cdot, w) = \beta_2(w)$ □

(b) **Beh.:** $(\beta_1)^* = \beta_2$
Bew.: $(\beta_1)^* : W^{**} \to V, \hat{w} \mapsto \hat{w} \circ \beta_1$.
Seien $w, w' \in W$.
$\Rightarrow (\beta_1)^*(w)(w') = (\hat{w} \circ \beta_1)(w') = \hat{w}(\beta_1(w')) = \hat{w}(\beta(w', \cdot)) = \beta(w', w) = \beta(\cdot, w)(w') = \beta_2(w)(w')$
$\Rightarrow (\beta_1)^*(w) = \beta_2(w) \Rightarrow (\beta_1)^* = \beta_2$ □

(c) **Beh. 1:** Sei $v \in V \setminus \{0\}$, dann gilt: $\beta(v, w) = 0\ \forall w \in W \Leftrightarrow \beta_1(v) = 0 \in W^*$ □

Beh. 2: V, W K-Vektorräume, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt:
ϕ ist Isomorphismus. $\Leftrightarrow \phi^*$ ist Isomorphismus.
Bew.: $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_W \Leftrightarrow \mathrm{id}_{W^*} = (\mathrm{id}_W)^* = (\phi \circ \phi^{-1})^* = (\phi^{-1})^* \circ \phi^*$ □

Beh.: β ist nicht ausgeartet in der ersten Variable. $\Leftrightarrow$ β ist nicht ausgeartet in der zweiten Variable.
Bew.: β ist nicht ausgeartet in der ersten Variable.
$\overset{\text{Beh.1}}{\Longleftrightarrow} \beta_1$ injektiv $\overset{\dim V = \dim W < \infty}{\Longleftrightarrow} \beta_1$ bijektiv $\overset{\text{Beh.2}}{\Longleftrightarrow} (\beta_1)^*$ bijektiv $\overset{\text{(b)}}{\Longleftrightarrow} \beta_2$ bijektiv $\overset{\dim V = \dim W < \infty}{\Longleftrightarrow} \beta_2$ injektiv
$\overset{\text{Beh.1}}{\Longleftrightarrow} \beta$ ist nicht ausgeartet in der zweiten Variable. □