

Aufgabe 1:

Wir wollen die Determinante folgender Matrix berechnen

$$M = \begin{pmatrix} x & a & a & a & \dots & a \\ a & x & a & a & \dots & a \\ a & a & x & a & \dots & a \\ a & a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$$

Wir machen einige Zeilen- und Spaltenumformungen

Subtrahiere die erste Zeile von allen anderen...

$$\begin{pmatrix} x & a & a & a & \dots & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{pmatrix}$$

Addiere Spalte 2 bis n zu Spalte 1...

$$\begin{pmatrix} x+a+a+a+\dots+a & a & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat nun Dreiecksgestalt und wir können die Determinante ablesen:

$$\text{Det}(M) = (x + (n-1) * a)(x - a)^{n-1}$$

Aufgabe 2:

Durch Zeilenumformungen oder Entwicklung erhält man:

$$\text{Det}(A) = 2x^9 - 12x^8y^2 + 30x^7y^3 - 40x^6y^4 + 30x^5y^5 - 12x^4y^6 + 2x^3y^7$$

$$\text{Det}(B) = x^2 - 4x^4 + 6x^6 - 4x^8 + x^{10}$$