Also hier die Matrix:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Man rechne aus:

Determinante: 0

Charakteristisches Polynom: $-x + 3x^2 - 3x^3 + x^4$

Eigenwerte: $\{1, 1, 1, 0\}$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wir haben also 2 Eigenvektoren, wir ergänzen diese zu einer
Basis, hier die Neuen Basisvektoren in den Spalten der Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Inverse: S^-1 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

in der neuen Basis S erhalten wir nun: T2 = S^-1 T S = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Diese hat offenbar noch keine Diagonalgestalt,
wir beschränken uns nun auf den schlechten Block rechts unten

$$TT = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen wieder Das Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren

Polynom: $1 - 2x + x^2$

Eigenwerte: $\{1, 1\}$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Der Eigenvektor der kleinen Matrix ist also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nun konstruieren wir eine neue Basis. Die beiden Eigenvektoren
von T aus der vorherigen Basis behalten wir. Jetzt betrachten wir den
Eigenvektor von TT. Dementsprechent kombinieren wir: $2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir ergänzen dies wieder zu einer Basis

$$S2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne inverse S2^-1: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Und nun wieder der Basiswechsel:

S2^-1 T S = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nun haben wir Dreiecksgestalt

(* Noch eine kleine 3x3 Übung *)

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinante: 3

Charakteristisches Polynom: $3 - x + 3x^2 - x^3$

Out[651]=

$-1 - x^2$

Eigenwerte: $\{3, i, -i\}$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 1 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalgestalt in C, in R weder Diagonalisierbar noch Trigonalisierbar

Out[656]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$