1 . Aufgabe :
Beweisen oder widerlegen sie die folgenden Aussagen:

a) Es seien A, B, C Mengen mit $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ und $X = A \cup B \cup C$. Dann gibt es eine Äquivalenzrelation of X mit genau den Äquivalenzklassen A, B, C.

b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $(n > 0)$ gibt es eine Gruppe mit n Elementen.

c) Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau einen Unterraum $U \leq V$, für den $\phi|_U : U \to W$ ein Isomorphismus ist.

d) Es gibt ein lineares Gleichungssystem mit genau 3 Lösungen.

2 . Aufgabe :
Es sei K ein Körper und V, W, X seien K-Vektoräume. Außerdem seien $\phi : V \to W$ und $\psi : W \to X$ lineare Abbildungen. Zeigen sie:

a) $\psi \circ \phi : V \to X$ ist eine lineare Abbildung.

b) Wenn ϕ bijektiv ist, so ist die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : W \to V$ eine lineare Abbildung. *Sie dürfen annehmen, dass V, W endlich dimensional*

3 . Aufgabe :
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

gegeben.
Für welche t hat $Ax = b$ mindestens eine Lösung?

4 . Aufgabe :
Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $K-$Vektorräumen V und W

1. f ist genau dann injektiv, wenn $Kern(f) = \{0\}$ gilt.

2. f ist genau dann injektiv, wenn es ein $g : W \to V$ mit $g \circ f = id_V$ gibt.