Gleichungssystem in $\mathbb{F}_7$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

I = I + II (Damit $a_{1,1} \neq 0$), außerdem: -1 = 6, -2 = 5, -3 = 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminiere nun die Einträge der 1. Spalte (außer den 1.): II = II - I, III = III + I

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Normiere Zeile 1 und 2 auf eine Führende 1. In $\mathbb{F}_7$ gilt: $3^{-1} = -2$, $-2^{-1} = 3$ da $-2*3 = 5*3 = 15 = 1$.
Also I = -2 * I, II = 3 * II

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

I = I + 2 * II, III = III + 3 * II, IV = IV + 2 * II

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

II = II - III, IV = IV + III, Normiere III auf eine Führende 1 durch III = 2 * III.
Im 2. Schritt noch I = I - III

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Lösung $x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = -2$. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich als die spezielle Lösung des inhomogenen Systems + die allgemeine Lösung des homogenen Systems (Ja ich weis man sieht hier direkt, dass dies die einzige Lösung ist......) Betrachte das homogene System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses besitzt offenbar nur die triviale Lösung. Damit ist die obige Lösung die einzige. Nun noch kurz Nachrechnen ob auch alles stimmt:
$I : 0 * (-2) + 2 * (-2) + 1 * (-2) = -6 = 1$
$II : 3 * -2 + (-1) * (-2) + 6 * (-2) = -6 + 2 - 12 = -16 = 5$
$III : (4 + 3 - 1) * (-2) = 6 * (-2) = (-1) * (-2) = 2$
$IV : (0 + 5 + 2) * (-2) = 7 * (-2) = 0 * (-2) = 0$