WS 08/09 Algebra 1 Musterlösung Blatt 4:

1. Aufgabe:

(a) Offenbar besitzt jedes Element $[g] \in A$ einen Repräsentanten der Form $g = a + b \cdot X + c \cdot Y$.
Fallunterscheidung: $a \neq 0$
Betrachte $g * (a - bX - cY) = a^2 - (bX + cY)^2 = a^2 - b^2X^2 - bcXY - c^2Y^2 \equiv a^2 \Rightarrow g \in A^*$.
Sei nun $a = 0$:
Betrachte $g * X = bX^2 + cXY \equiv 0 \Rightarrow g \notin A^*$.

(b) Es gibt natürlich die trivialen Hauptideale (0) und (1). Nach (a) gilt $(g) = (a+bX+cY) = A = (1)$ falls $a \neq 0$.
Betrachte also $a = 0$. Es gibt die weiteren Hauptideale $(X), (Y), (X + cY)$ mit $c \neq 0$.

(c) Betrachte Kombinationen aus (b). Kombinationen mit $(0), (1)$ fallen von vornerein weg. Offenbar gilt:
$(X + cY) \subset (X) + (Y) = (X, Y)$
$(X) + (X + cY) = (X, Y), (Y) + (X + cY) = (X, Y)$
$(Y) \subset (X + cY, X + c'Y)$ falls $c \neq c' \Longrightarrow (X + cY, X + c'Y) = (X, Y)$.
Das einzige weitere Ideal (außer den Hauptidealen) ist also (X, Y).

2. Aufgabe:

(a) $X^2 + X + 1$ ist offenbar irreduzibel über $\mathbb{R}$, da $\mathbb{C}$ einzige algebraische Erweiterung gilt sofort $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1) \cong \mathbb{C}$.

(b) Offenbar besitzt jedes Element $[g] \in \mathbb{R}[X]/(X^2+X) = A$ einen Repräsentanten der Form $g = a+bX$.
Betrachte folgende Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow A : \phi(a, b) = a + bX$$

Diese ist nach Definition linear und surjektiv, bleibt zu zeigen das ϕ injektiv, dann ist ϕ Vektorraum-Isomorphismus. Sei also

$$\begin{aligned} & \phi(a, b) = a + bX \equiv 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a + bX \in (X^2 + X) \\ \Longleftrightarrow\ & a + bX = (X^2 + X) \cdot P(X) \text{ mit } P(X) \in \mathbb{R}[X] \\ \Longleftrightarrow\ & a + bX = P(X) = 0 \text{ durch Koeffizientenvergleich} \end{aligned}$$

3. Aufgabe:

Betrachte folgende Abbildung

$$\phi : S^{-1} \longrightarrow A[X]/(aX - 1) : \phi(\frac{b}{a^n}) = bX^n$$

Behauptung (i): ϕ ist verträglich bzgl. Addition:
Betrachte folgendes kommutative Diagram: (Sei o.B.d.A. n $\geq$ m)

$$\begin{tikzcd} \frac{b}{a^n} \arrow[d, "\phi"] & + & \frac{b'}{a^m} \arrow[d, "\phi"] & & & = & \frac{b+b'a^{n-m}}{a^n} \arrow[d, "\phi"] \\ bX^n & + & b'X^m & \overset{aX\equiv 1}{=} & bX^n + b'X^m(aX)^{n-m} & = & (b + b'a^{n-m})X^n \end{tikzcd}$$

Behauptung (ii): ϕ ist verträglich bzgl. Multiplikation:

$$\phi(\frac{b}{a^n} \cdot \frac{b'}{a^m}) = \phi(\frac{bb'}{a^{n+m}}) \overset{\text{def.}}{=} bb'X^{n+m} = bX^n \cdot b'X^m \overset{\text{def.}}{=} \phi(\frac{b}{a^n}) \cdot \phi(\frac{b'}{a^m})$$

Behauptung (iii): ϕ ist injektiv:

$$\phi(\frac{b}{a^n}) = 0 \;\Leftrightarrow\; bX^n \in (aX-1) \Leftrightarrow bX^n = (aX-1)\cdot P(X) \text{ mit } P(X) \in R[X]$$

Ist R nullteilerfrei folgt die Behauptung nun aus Gradgründen. Falls nicht definiere P:

$$P(X) = \sum_{i=d}^{e} \alpha_i X^i \text{ mit } \alpha_d, \alpha_e \neq 0$$

Koeffizientenvergleich zeigt sofort:

$$\begin{aligned}
&\alpha_d = -bX^n && \text{(Der niedrigste Term multipliziert mit 1 kann nicht verschwinden)}\\
\Longrightarrow\; &\alpha_{d+1} = aX\cdot\alpha_d && \text{(Damit der zweitniedrigste verschwindet)}\\
\Longrightarrow\; &\alpha_i = aX\cdot\alpha_{i-1} \text{ für } d < i \leq e && \text{(Damit der i-te verschwindet)}\\
\Longrightarrow\; &\alpha_e = (aX)^{e-d}\cdot -bX^n\\
\Longrightarrow\; &\alpha_e\cdot aX = b(aX)^{e-d+n+1} = 0 && \text{(Damit der höchste verschwindet)}\\
\Longrightarrow\; &a^{e-d+n}\cdot(b\cdot a - 0\cdot a^n) = 0 && (a^{e-d+n} \in S)\\
\Longrightarrow\; &\frac{b}{a^n} \sim \frac{0}{a} = 0 \text{ in } S^{-1}A\\
\Longrightarrow\; &\phi \text{ injektiv}
\end{aligned}$$

Behauptung (iv): ϕ ist surjektiv:
Es ist klar, dass die Monome $b\cdot X^n$ als Bild von $\frac{b}{a^n}$ enthalten sind. Jedes Polynom lässt sich als Summe von Monomen darstellen. Der Rest folgt aus (i).

4. Aufgabe:

(a) $\mathbb{C}[X]$ ist Hauptidealring, wir betrachten also genau Ideale die von einem irreduziblen Element erzeugt werden. Da alle Polynome vom Grade ≥ 2 eine Nullstelle besitzen und damit reduzibel sind, sind die Primideale genau:

$$(0), (1+\lambda X) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}$$

(b) (X^2+X+2) irreduzibel über $\mathbb{R}$
$\Longrightarrow \mathbb{R}[X]/(X^2+X+2) \cong \mathbb{C}$ (denn $\mathbb{C}$ ist einzige algebraische Erweiterung von $\mathbb{R}$)
$\Longrightarrow$ Nur $(0), (1)$ sind Ideale
$\Longrightarrow (0)$ einziges Primideal

(c) Offenbar gilt: $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3)$. Da diese Faktoren teilerfremd sind gilt nach dem Chinesichen Restsatz:

$$\mathbb{R}[X]/(X^3-6X^2+11X-6) \cong \mathbb{R}[X]/(X-1) \;\oplus\; \mathbb{R}[X]/(X-2) \;\oplus\; \mathbb{R}[X]/(X-3) \cong \mathbb{R} \;\oplus\; \mathbb{R} \;\oplus\; \mathbb{R}$$

Da $\mathbb{R}$ Körper sind die einzigen Ideale in $\mathbb{R}$ ganz $\mathbb{R}$ bzw. (0). Für ein Primideal muss der Restklassenring nullteilerfrei sein, damit scheided z.B. $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ aus, das Primideal a muss also 2 der direkten Summanten enthalten.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow a \cong \mathbb{R} \;\oplus\; \mathbb{R} \;\oplus\; 0 \vee a \cong \mathbb{R} \;\oplus\; 0 \;\oplus\; \mathbb{R} \vee \cong = 0 \;\oplus\; \mathbb{R} \;\oplus\; \mathbb{R}\\
&\Longrightarrow a = (X-1) \vee a = (X-2) \vee a = (X-3)
\end{aligned}$$

(d) Analog zu (c) gilt:

$$\mathbb{R}[X]/(X^4-1) \cong \mathbb{R} \;\oplus\; \mathbb{R} \;\oplus\; \mathbb{C}$$
$$\Longrightarrow a = (X-1) \vee a = (X+1) \vee a = (X^2+1)$$

(e) Die Nullabbildung ist per Definition kein Algebrenhomomorphismus. Im Allgemeinen bildet jeder Ringhomomorphismus 1 auf 1, 0 auf 0 ab, somit bildet automatisch jeder K-Algebrenhomomorphismus K auf K ab.

$\mathbb{C}[X]$: Jeder Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{R}$ induziert einen Ringhomomorphismus $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, dies ist aber nicht möglich da $\phi(i^2) = \phi(i)^2 = -1 \Longrightarrow \phi(i) \in \{i, -i\} \Longrightarrow \phi(i) \notin \mathbb{R}$ $\lightning$.
Es existiert also kein $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus nach $\mathbb{R}$.
Jeder $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus ϕ nach $\mathbb{C}$ ist nun durch die Wahl des Bildes von i bzw. von X eindeutig festgelegt. Wie im obigen Fall gilt $\phi(i) \in \{i, -i\}$, für $\phi(X)$ gibt es keine Einschränkungen.

$\mathbb{R}[X]/(X^2 + x + 2)$: Der Ring ist isomorph zu $\mathbb{C}$ (nach (b)). Es gibt somit keinen Algebrenhomomorphismus nach $\mathbb{R}$, die einzigen Homomorphismen nach $\mathbb{C}$ sind die komplexe Konjugation und die Identität.

$\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^3-6X^2+11X-6)}$: Das Bild von X muss offenbar Nullstelle des Polynoms sein. Es gibt somit genau 3 Algebrenhomomorphismen, sowohl nach $\mathbb{R}$ als auch nach $\mathbb{C}$, wobei X jeweils auf 0, 1 oder 2 abgebildet wird.

$\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1)$: Analog zur letzten Aufgabe gilt: Es gibt 2 Homomorphismen nach $\mathbb{R}$, 4 nach $\mathbb{C}$. In beiden Fällen kann X auf 1 bzw. -1 abgebildet werden, im Falle der Abbildung nach $\mathbb{C}$ kann X auch auf i bzw. $-i$ abgebildet werden.