WS 08/09 Algebra Probeklausur

15. Aufgabe:

Sei G (i.A. unendliche Gruppe), $I \subseteq H \subseteq G$ Untergruppen. $(G : H)$ bezeichne den Index von G in H. Man zeige:

(a) $(G : H) < \infty \wedge (I : H) < \infty \Longleftrightarrow (G : I) < \infty$. Insbesondere gilt dann: $(G : I) = (G : H) \cdot (H : I)$.
Beweis:
$\Longrightarrow$: Betrachte die disjunkten Vereinigungen:

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i H = \bigcup_{i=1}^{n} g_i (\bigcup_{j=1}^{m} h_j I) = \bigcup_{i,j} (g_i \cdot h_j) I \qquad (g_i \in G, h_j \in H)$$

Hieraus folgt auch gleich die Identität: $(G : I) = (G : H) \cdot (H : I)$.
$\Longleftarrow$: Sei $(G : H) = \infty$.

$$\Longrightarrow G = \dot{\bigcup_{\alpha \in A}} g_\alpha H \Rightarrow \dot{\bigcup_{\alpha \in A}} g_\alpha I \subseteq G$$

Also besitzt I unendlich viele Nebenklassen. Analog für $(H : I) = \infty$.

(b) Sei $(G : H) = p$ prim, $x \in G, x \notin H$, dann erzeugen H und x als Gruppe schon ganz G.
Beweis:
Sei $\tilde{G} =< H, x >$ die von H und x erzeugte Gruppe.
$x \notin H \Longrightarrow (\tilde{G} : H) = k > 1$
Aber $\tilde{G} \subseteq G$. Damit folgt nach a) wegen $(G : H) = (G : \tilde{G}) \cdot (\tilde{G} : H) : p = k \cdot l$
Mit p prim folgt $p = k \Longrightarrow (G : \tilde{G}) = 1 \Longrightarrow \tilde{G} = G$.

(c) Das Zentrum einer Gruppe kan niemals Primzahlindex haben.
Beweis:
Beweis per Widerspruch. Sei $Z = Z(G)$ (Zentrum von G), $(G : Z) = p$ prim. $x \in G, x \notin Z$.
$\Longrightarrow G =< Z, x >$.
Da Z mit allen Elementen kommutiert kann man jedes $g \in G = z \cdot x^n$ mit $z \in Z$ schreiben.
$\Longrightarrow \forall g_1, g_2 \in G : g_1 \cdot g_2 = z_1 \cdot x^{n_1} \cdot z_2 \cdot x^{n_2} = z_2 \cdot x^{n_2} \cdot z_1 \cdot x^{n_1} = g_2 \cdot g_1$.
$\Longrightarrow G$ abelsch. $\Longrightarrow Z = G \Longrightarrow p = 1 \lightning$

(d) Jede Gruppe der Ordnung p^2 (p prim) ist abelsch.
Beweis:
Jede Gruppe mit Primzahlpotenzordnung besitzt nicht triviales Zentrum. Nach dem Satz von Lagrange folgt also $\#Z(G) \in \{p, p^2\}$.
Nach c) ist $\#Z(G) = p$ nicht möglich. $\Longrightarrow \#Z(G) = p^2 \Longrightarrow Z(G) = G \Longrightarrow G$ abelsch.