1 Beweis der Äquivalenz von Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit in metrischen Räumen

Die Hinrichtung (X Überdeckungskompakt $\Rightarrow$ X Folgenkompakt) wollen wir als gegeben hinnehmen. Die Rückrichtung zeigen wir über die transponierte Aussage:

$$\begin{aligned} & (\text{X Folgenkompakt} \Rightarrow \text{X Überdeckungskompakt}) \\ \Leftrightarrow\quad & (\text{X nicht Überdeckungskompakt} \Rightarrow \text{X nicht Folgenkompakt}) \end{aligned}$$

Sei also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

ohne endliche Teilüberdeckung.

Zuerst wollen wir die Einschränkung annehmen, dass die Überdeckung abzählbar sei, also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} U'_j$$

Wir können o.B.d.A. annehmen:

$$U'_i \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} U'_j$$

(Man lasse einfach alle Mengen weg, für die dies nicht erfüllt ist. Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, ist dies immer noch eine unendliche Vereinigung.)

Betrachte nun eine Folge a_n definiert durch:

$$a_i \in U'_i \wedge a_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} U'_j$$

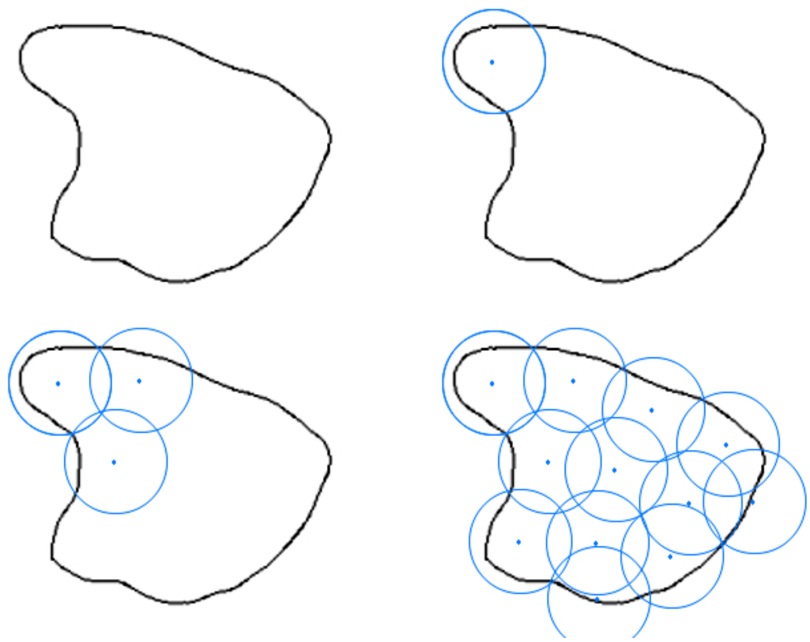
(Solche a_i existieren nach unserer Voraussetzung an die U'_i)
Sei nun a_{k_i} eine konvergente Teilfolge mit $a_{k_i} \to$ a für i $\to \infty$, dies wollen wir zu einem Widerspruch führen.

$$\lim_{i \to \infty} a_{k_i} = a \Rightarrow a \in X \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a \in U'_n$$

Nun ist aber U'_n eine offene Umgebung von a und nach Konstruktion der Folge liegen höchstens n Folgenglieder $(a_1 \textit{ bis } a_n) \textit{ in } U'_n$. Damit kann a kein Häufungspunkt von a_n sein. Dann kann aber auch a_{k_i} nicht gegen a konvergieren.

Damit ist die Äquivalenz bewiesen, falls es eine abzählbar unendliche Überdeckung von X gibt, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wenn wir nun zeigen könnten, dass jede Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, wären wir fertig. Dies kann leider nicht immer zutreffen. Betrachte z.B. $\mathbb{R}$ versehen mit der diskreten Metrik d. Offenbar gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}}\{r\}$. Diese Überdeckung kann aber keine abzählbare Teilüberdeckung besitzen. Glücklicherweise sind solche Räume dann auch nicht Überdeckungskompakt wie wir jetzt zeigen werden.

Sei a_n eine Nullfolge (mit $a_i > 0\ \forall i \in \mathbb{N}) z.B. a_i = \frac{1}{i}$
Wir wollen nun für jedes i den Raum X mit Kugeln vom Radius a_i überdecken, in der Weise dass jeweils die Kugelmittelpunkte nicht in der Vereinigung der übrigen Kugeln liegt.



Sei also $U_r(a) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$ *(Offene Kugel um a mit Radius r)*

$$K_{i,j} = Ua_i(x_{i,j}) \text{ wobei } x_{i,j} \notin \bigcup_{k=1}^{j-1} K_{i,k} \text{ beliebig}$$

Falls $X = \bigcup_{k=1}^{j-1} K_{i,k}$ wähle $x_{i,j}$ beliebig

Nun können 2 Fälle auftreten:

1. $\forall i \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : X = \bigcup_{k=1}^{n} K_{i,k}$
   d.h. für jeden noch so kleinen Radius können wir den Raum mit endlich vielen Kugeln überdecken.

2. $\exists i \in \mathbb{N} : X \supsetneqq \bigcup_{k=1}^{n} K_{i,k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   d.h. wir können den Raum nicht mit endlich vielen Kugeln überdecken.
   Diese Fall tritt z.B. bei der diskreten Metrik auf.

Wir wollen zuerst den 2. Fall behandeln.
Betrachte für dieses feste i die Folge b_n der Kugelmittelpunkte $b_j = x_{i,j}$. Nach Definition gilt: $\forall j \neq k \in \mathbb{N} : d(b_j, b_k) >= r = a_i > 0$. Damit hat aber b_n keinen Häufungspunkt, damit keine Konvergente Teilfolge und wir sind fertig.
(Für diesen Fall müssen wir also nicht zeigen, dass eine abzählbare Teilüberdeckung existiert)

Bleibt noch Fall 1 übrig. In diesen Fall müssen wir nun zeigen, dass jede Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.
Sei L_n eine Folge der Kugeln so dass $\forall i, j \in \mathbb{N} \;\; \exists k \in \mathbb{N} : K_{i,j} = L_k$
(Betrachte eine beliebige Abzählung der $K_{i,j}$. Diese sind gleich mächtig wie $\mathbb{N}^2$ und damit abzählbar)

$$M_k = \begin{cases} U_i & falls \quad \exists i \in I : L_k \subseteq U_i \; (falls\ i\ nicht\ eindeutig\ dann\ ein\ beliebiges) \\ \emptyset & sonst \end{cases}$$

Offenbar ist M_k abzählbar und eine Teilüberdeckung von U_i (und der leeren Menge). Es bleibt also zu zeigen:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_k$$

Sei $x \in X$ beliebig
$\Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i$
$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : T = U_r(x) \subseteq U_i$ *(da U_i offen)*
a_n Nullfolge $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{N} : a_j < \frac{r}{2}$
Nach Konstruktion der $K_{m,n}$ $\exists k \in \mathbb{N} : x \in K_{j,k}$
Wähle nun $l \in \mathbb{N} : L_l = K_{j,k}$
Aus der Dreiecksungleichung folgt nun: $K_{j,k} = L_l \subseteq T \subseteq U_i$
Es folgt nach Definition der $M_n : M_l = U_v$ $(v \in I)$ mit $x \in L_l \subseteq U_v \Rightarrow x \in M_l$
(Es muss nicht gelten $i = v$ denn es kann durchaus vorkommen, dass T in mehreren der U_i enthalten ist)
Nun sind wir aber fertig denn es gilt:

$$\forall x \in X : x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$$

Wir haben das Problem also auf eine abzählbare Überdeckung reduziert.