Wir werden im Folgenden zwei Gleichungssysteme auseinandernehmen und dabei versuchen den Stoff der LA1 möglichst vollständig anzuwenden. Natürlich kann man einige Ziele schneller direkt erreichen. Die s soll einfach noch einmal einen überblick über den Stoff geben. Der Autor erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. überhaupt werden hier nur Matritzen und Vektorräume behandelt. Andere Teile wie z.B. die Sn bleiben außen vor. Im Anhang finden sich noch ein paar weitere Matritzen zum selbst rechnen

$$\text{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ Tx=a}$$

Wir berechnen zuerst das Charakteristische Polynom von T

$$\text{Char(T)} = \det(\text{T - l1}) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3-x & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -x & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1-x \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun also die Determinante berechnen. Hier eine Liste der gebräuchlichstes Methoden

- Laplaceentwicklung
- Sarrus-Regel für n=2 oder n=3
- Zeilen/Spaltenumformungen um die Matrix auf Dreiecksgestalt zu bringen. Dann kann man die Determinante als Produkt der Diagonaleinträge ablesen. Umformungen heist hier immer addition des Vielfachens einer Zeile/Spalte zu einer anderen! Vertauschen von Zeilen/Spalten oder multiplizieren mit Skalaren ändern die Determinante!
- Bei Matrix mit Blockgestalt wenn die Blöcke über / unter der Diagonalen 0 sind multiplizieren der Determinanten der Diagonalblöcke
- (Leibniz Formel - eher für theoretische Zwecke geeignet)

Wir Entwickle nach der 3. Zeile

$$\text{Char(T)} = -1^{3+3} * \text{(-x)} * \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & -5 \\ -2 & 1 & -1-x \end{pmatrix} + -1^{3+4} * \text{(-2)} * \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit T1} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & -5 \\ -2 & 1 & -1-x \end{pmatrix} \text{ T2} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt dies: Char(T) = (-x) * det(T1) + 2 * det(T2)

Wende Sarrus Regel an für T1, T2

$det(T1) = (2-x)(3-x)(-1-x) + (1)(-5)(-2) + (-1)(2)(1) - (-1)(3-x)(-2) - (1)(2)(-1-x) - (2-x)(-5)(1) = 8 - 2x + 4x^2 - x^3$
$det(T2) = (2-x)(3-x)(1) + (1)(-1)(-2) + (-1)(2)(1) - (-1)(3-x)(-2) - (1)(2)(1) - (2-x)(-1)(1) =$

$-4x + x^2$
Zusammensetzen ergibt:

Char(T) = (-x) * det(T1) + 2 * det(T2) = -x * $8 - 2x + 4x^2 - x^3$ + 2 * $-4x + x^2 = -16x + 4x^2 - 4x^3 + x^4$

Die Determinante ist natürlich genau das Charakteristische Polynom mit 0 eingesetzt. det(T) = Char(T)(0) = 0

Nun suchen wir Nullstellen
Offenbar ist 0 eine Nullstelle, $x_1 = 0$
Char(T) = x * $(-16 + 4x - 4x^2 + x^3)$
Nun haben wir ein Polynom 3. Grades. Nullstellen zu finden ist leider nicht ganz trivial. Da das Polynom normiert ist mit ganzen Koeffizienten, schauen wir uns die Teiler des konstanten Koeffizientens an. (Ein nicht trivialer Satz von Gauss besagt dass wenn es überhaupt rationale Nullstellen gibt, dann teilen diese den letzten Koeffizienten
Als Nullstellen kommen also in Frage: 16, 8, 4, 2, 1, -1, -2, -4, -8, -16
Durch Einsetzen stellen wir fest: 4 ist eine Nullstelle, $x_2 = 4$
Wir führen eine Polynomdivision durch (x - 4) durch und erhalten:

Char(T) = x * (x-4) * $(4 + x^2)$

Wir sehen nun: im reellen gibt es keine weiteren Nullstellen, im komplexen gibt es noch die Nullstellen 2i und -2i
Wir erhalten also folgende Eigenwerte: 0; 4; (2i; -2i)

Nun widmen wir uns der Frage der Diagonalisierbarkeit / Trigonalisierbarkeit
Beide haben als notwendige Voraussetzung, dass das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Füd die Trigonalisierung ist dies auch hinreichend. Deshalb ist über C auch jede Matrix Trigonalisierbar, weil über C jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Wissen nun also:

- über R: Weder diagonalisierbar noch Trigonalisierbar
- über C: Auf jeden Fall Trigonalisierbar

Wir wollen also noch prüfen, ab T über C auch diagonalisierbar ist. Hier eine kurze Liste von Diagonalisierbarkeitskriterien

- T diagonalisierbar
- $\Longleftrightarrow$ Char(T) zerfällt: $Char(T) = \prod_{i=1}^{m}(x - \lambda_i)^{e_i}$ und $Dim(ER_i) = e_i$ (Dimension des Eigenraums ist gleich der Vielfachheit der Nullstelle
- $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren
- $\Longleftrightarrow$ Das Minimalpolynom hat nur einfache Nullstellen
- ($\Longleftarrow$ Es gibt so viele paarweise verschiedene Eigenwerte wie die Dimension des Raumes, dies ist hinreichend aber nicht notwendig)

Wir können also hier das letzte Kriterium anwenden. Die Dimension ist 4 und wir haben 4 verschiedene Eigenwerte gefunden: 4, 2i, -2i, 0.
Über C ist T also diagonalisierbar. In der Diagonalgestallt stehen auf der Diagonalen genau die Eigenwerte

$$\text{T} = \text{S } T_d \ S^{-1} \text{ mit } T_d = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun stellen wir uns die Frage nach der Basis, bzgl der die Matrix diese Gestalt hat. Die Basisvektoren sind natürlich genau die Eigenvektoren. Als nächstes müssen wir also nun die Eigenräume ausrechnen

Für Eigenwerte λ_i berechne Eigenraum ER_i: ER_i = Kern(T - λ_i 1)
Die linearen Gleichungssysteme kann man mit dem Gauss Verfahren z.B. lösen, wir gehen hier nicht näher darauf ein. Wir erhalten als Eigenvektoren:

$$\text{EV1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ EV2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ EV3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{EV4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Basiswechselmatrix S hat genau die Eigenvektoren in den Spalten stehen. Natürlich muss man auf die Reihenfolge achten, identisch mit der Reihenfolge der Eigenwerte in Ts

$$\text{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & i & -i & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun S invertieren. Frage? Warum ist S überhaupt invertierbar? Hier einige invertierbarkeitskriterien: (Natürlich muss S quadratisch sein)

- S invertierbar
- $\Longleftrightarrow$ Det(S) != 0
- $\Longleftrightarrow$ S Hat vollen Rang
- $\Longleftrightarrow$ Die Spalten oder Zeilen von S Spalten den ganzen Vektorraum auf
- $\Longleftrightarrow$ Alls Zeilen linear unabhängig oder alle Spalten linear unabhängig
- $\Longleftrightarrow$ Jedes LGS Sx=y hat für gegebens y genau eine Lösung x

Zum invertieren gibt es im wesentlichen 2 Möglichkeiten. Man kann die Kramersche Regel benutzen oder man benutzt Zeilenumformungen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1+i & 1-i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun nimmt man Zeilenumformungen vor, bis links die Einheitsmatrix steht, rechts steht dann die inverse

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{4} & -\frac{i}{4} & \frac{1}{2}+\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{4} & \frac{i}{4} & \frac{1}{2}-\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Wir können also nun die Inverse ablesen und erhalten S^{-1}

$$S^{-1} = 1/4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2i & -i & -i & 2+i \\ -2i & i & i & 2-i \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir noch testen ob wir richtig gerechnet haben indem wir die Matritzen ausmultiplizieren:

$$ST_dS^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1+i & 1-i & 0 \\ 0 & i & -i & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2i & -i & -i & 2+i \\ -2i & i & i & 2-i \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir erwartet erhalten wir wieder T
Nun wissen wir schon einiges über die Matrix und können uns daran machen einige Elemtare Dinge anzugeben. Wir sind interessiert an z.B. Kern, Bild, Rang, Defekt, Invertierbarkeit
Zuerst zum Kern: Der Kern haben wir schon berechnet, der Kern ist natürlich genau der Eigenraum zum Eigenwert 0

$$\text{Kern(T)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Defekt = Dim(Kern) können wir nun direkt zu 1 ablesen
Aus der Dimensionsformel: Dimension(Ganzer Vektorraum) = Dimension(Bild) + Dimension(Kern) ergibt sich nun:
Rang = 4 - 1 = 3
Die Matrix hat also nicht vollen Rang und ist damit nicht invertierbar

Da T nicht invertierbar und damit nicht Surjektiv kann das Bild nicht ganz V sein. Das Bild wird erzeugt von den Spaltenvektoren von T (denn diese sind genau die Bilder der Basisvektoren). Da der Rang 3 ist müssen die Spaltenvektoren linear abhängig sein. Wir hätten aber gerne eine Basis der Bildes und müssen deshalb einen der Spaltenvektoren eliminieren. Durch genaues hinsehen sieht man, die erste Spalte ist das -2 fache det 3. Wir lassen also die erste weg und erhalten:

$$\text{Bild(T)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun haben wir vorhin gesagt die Matrix sei trigonalisierbar. Die eben berechnete Dreiecksgestalt ist natürlich genau die Trigonalisierung.

Als letztes könnte man noch nach dem Minimalpolynom m(T) von T fragen. Diese Frage ist allerdings trivial. Da jeder Linearfaktor von Char(T) mindestens einmal in m(T) vorkommen muss, aber Char(T) nur einfache Nullstellen hat gilt natürlich Char(T) = m(T)

Nach all der Vorbereitung können wir uns jetzt mal an das Gleichungssystem heranwagen... Tx = a Wir wissen: Die allgemeint Lösung des inhomogenen LGS Tx = a ist eine spezielle Lösung b des inhomogenens LGS Tb = a + die allgemeine Lösung des homogenen LGS Tx = 0
Die Lösung des homogenen LGS kennen wir bereits, diese ist natürlich genau der Kern. Finden wir nun also ein b mit Tb = a so ist unser Lösungsraum:

$$\text{b + Kern(T)} = \text{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir uns also ein b beschaffen. Wir machen also Zeilenumformungen. Noch einmal zur erinnerung: Um ein LGS zu lösen darf man nur Zeilenumformungen machen, sonst ändert man die Lösungsmenge. Zur berechnung der Determinante bzw. zum Bestimmen des Ranges darf man sowohl Zeilenumformungen als auch Spaltenumformungen und das natürlich auch gemischt machen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit Zeilenumformungen können wir erreichen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & * \\ 2 & 3 & -1 & -5 & * \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch: $b_4 = -1$ und $b_4 = 1$
Es gibt also keine Lösung

Auch nochmal zur Wiederholung: Ein inhomogenes LGS hat entweder Keine (wie hier), genau eine, oder unendlich viele Lösungen. Das unendlich viele gilt natürlich nur über unendlichen Körpern wir R oder C und nicht über Fp wie wir in der Probeklausur gesehen haben. Ein homogenes LGS hat natürlich immer die triviale Lösung. Ein inhomogenes LGS hat genau dann eine Lösung, wenn der Rang des inhomogenen LGS gleich dem Rang des homogenen LGS

Natürlich hätte man das LGS auch gleich direkt mit dem Gauss lösen können ohne das Charakteristische Polynom zu berechnen. Auch den Rang z.B. hätte man schneller direkt ausrechnen können. Hier ging es aber eben darum einfach mal die Matrix komplet auseinanderzunehmen und Zusammenhänge zu zeigen

Nach all der Arbeit können wir uns nun an die zweite Matrix machen....

$$\text{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -8 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{Tx = a}$$

Wir berechnen das Charakteristische Polynom von T zu
$Char(T2) = 27 - 27x + 9x^2 - x^3$
Wie oben betrachten wir die Teiler der konstanten Koeffizientens: 27, 9, 3, 1, -1, -3, -9, -27
Wir erhalten das 3 eine Nullstelle ist und finden die anderen Nullstellen nach Polynomdivision mit

der pq Formel auch zu 3. Man hätte auch gleich sehen können dass dies die Binomische Formel ist

$Char(T) = (x-3)^3$

3 ist also der einzige Eigenwert
Nun berechnen wir den Eigenraum:

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben also einen zweidimensionalen Eigenraum
Das heist insbesondere, dass die Dimension ungleich der Vielfachheit der Nullstelle ist. Die Matrix ist damit also nicht diagonalisierbar (auch nicht in C) Für Trigonalisierung benötigen wir nur, dass das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dies ist auch in R der Fall. Die Matrix ist also sowohl über R als auch über C Trigonalisierbar.
Die Dreiecksmatrix und zugehörige Basis werden wir später berechnen

Zuerst machen wir uns nochmal an Bild / Kern
Da 0 kein Eigenwert ist, muss der Kern = {0} sein. Daraus folgt insbesondere Defekt = 0 und Rang = n = 3. Das Bild ist wie wir wissen ein Untervektoraum und hat in diesem Fall Dimension 3. Der einzige Untervektorraum der Dimension 3 in einem 3 dimensionalen Vektorraum ist natürlich der Raum selbst. Also Bild(T2) = V
Hieraus folg nun natürlich auch, dass T2 invertierbar

Für die Determinante setzen wir wieder 0 in Char(T2) ein und erhalten det(T2) = 27

Nun wollen wir uns einmal an die Trigonalisierung wagen. Wir gehen wie folgt vor. Den Eigenraum zum einzigen Eigenwert haben wir schon ausgerechnet.Wir ergänzen eine Basis des Eigenraums zu einer Basis B des ganzen Vektorraums. S sei die Standardbasis.

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ mit } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_S, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S$$

Bzgl. der Basis B haben die Vektoren also die Darstellung:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Nun wollen wir die Darstellungsmatrix Tb von T bzgl. der Basis B berechnen.
Wir wissen in der Darstellungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren (wieder bzgl. der Basis B)
Da v_1 und v_2 Eigenvektoren zum Eigenwert 3 sind gilt natürlich: $Tv_1 = 3v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ und $Tv_2 = 3v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_B$

Nun können wir einmal überlegen wie T_B denn aussehen könnte.

$$T_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & u \\ 0 & 3 & v \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

Da das Charakteristische Polynom bei einem Basiswechsel invariant bleibt, sehen wir sofort w = 3

$$T_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & u \\ 0 & 3 & v \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Insbesondere hat die Matrix jetzt schon die erwünschte Dreiecksgestalt
Das Bild von v3 bzgl der Basis B kennen wir leider nicht. Wir können aber das Bild von v3 bzgl. der Basis S ausrechnen durch ausmultiplizieren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -8 & 0 & 7 \end{pmatrix}_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}_S$$

Nun müssen wir $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ in der Basis B darstellen. Wir suchen also u, v so dass:

$$\text{u} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{v} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Anhand der ersten Zeile erkennen wir u = -4, Anhand der zweiten Zeile v = -6
Wir haben die Matrix also Trigonalisiert:

$$T_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Natürlich hätte man Tb auch einfach mit Basiswechselmatritzen ausrechnen können. Tb = S^-1 T S wobei in den Spalten von S die Basisvektoren stehen

$$\text{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T_B = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -8 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Natürlich erhalten wir das gleiche Ergebnis Nun war das Beispiel recht einfach, weil man jeden beliebigen Basisvektor hätte hinzunehmen
können, und die Matrix hätte immer Dreiecksgestalt bekommen. Wäre z.B. der Eigenraum nur eindimensional gewesen

hätte man schon Probleme bekommen. Nach der Basisergänzung hätte die Matrix dann folgende Gestalt gehabt:

$$\begin{pmatrix} 3 & \text{u1} & \text{u2} \\ 0 & \text{v1} & \text{v2} \\ 0 & \text{w2} & \text{w2} \end{pmatrix}$$

Diese ist i.A. natürlich keine Dreiecksgestalt. In diesem Fall muss man sich auf den 2x2 Block rechts unten beschränken un nur in diesem
Block wieder nach Eigenvektoren suchen. Ein solches Beispiel ist z.B. im Buch Lineare Algebra von Gerd Fischer durchgerechnet

Als einziges ungeklärt ist nun noch die Frage nach dem Minimalpolynom. Wir wissen jeder Linearfaktor des Characteristischen Polynoms muss mindestens einmal vorkommen. Auserdem muss das Minimalpolynom das Charakteristische Polynom teilen. Für das Minimalpolynom ergeben sich also 3 Möglichkeiten:

- $m_1 = (x - 3)$
- $m_2 = (x - 3)^2$
- $m_3 = (x - 3)^3$

Möglichkeit 1 können wir schon ausschließen. Wir wissen das Minimalpolynom annuliert die Matrix. Den Kern von (T - 3) haben wir aber schon ausgerechnet. Dieser ist genau der Eigenraum zum Eigenwert 3 und war zweidimensional, annuliert also nicht die gesammte Matrix. Weiter bleibt uns algemein nichts weiter übrig als auszuprobieren, wenn die Matrix annuliert wird. Wir berechnen also m2(T):

$$m_2(\text{T}) = (\text{T - 3}) * (\text{T - 3}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen also m2 annuliert T. Also ist m(T) = m2

Letzendlich lösen wir also wieder das LGS. 0 ist kein Eigenwert also ist der Kern = $\{0\}$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist also nur die triviale. Da das Bild der ganze Raum ist wissen wir schon im voraus, dass es eine spezielle Lösung geben muss. Diese muss dann auch gleich der allgemeinen sein. Durch etwas genaueres hinsehen sieht man, dass man den vektor a als Summe der 2. und der 3. Spalte schreiben kann. Die Lösung ist also:

$$\text{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun zuletzt noch 5 Beispielmatritzen mit angaben zu Eigenräumen, Minimalpolynom und ob Diagonalisierung / Trigonalisierung möglich ist. Da die Trigonalisierung nicht eindeutig ist, kann werden dafür keine Dreiecksmatritzen angegeben

$$T_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante: 16
Charakteristisches Polynom: $16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$ = (x - 2)^4
Minimalpolynom: $16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$ = (x - 2)^4 = Char(T)
Nicht diagonalisierbar
In C und R trigonalisierbar
Eigenwerte: $\{2, 2, 2, 2\}$
Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Rang = 4, Defekt = 0, Kern = 0, Bild = V

$$T_1^{-1} = 1/16 \begin{pmatrix} -14 & -7 & 18 & -5 \\ -8 & 4 & 8 & -4 \\ -32 & -8 & 32 & -8 \\ 12 & 14 & -20 & 10 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante: 1
Charakteristisches Polynom: $1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ = (x - 1)^5
Minimalpolynom: (x - 1)^3
Nicht diagonalisierbar
In C und R trigonalisierbar
Eigenwerte: $\{1, 1, 1, 1, 1\}$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang = 5, Defekt = 0, Kern = 0, Bild = V

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -6 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & 0 \\ 11 & 4 & -9 & 1 \\ -9 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinante: 1
Charakteristisches Polynom: $1 + 2x^2 + x^4$ = (x^2 + 1)^2
Minimalpolynom: $1 + 2x^2 + x^4$ = (x^2 + 1)
In C diagonalisierbar, in R nicht
In C trigonalisierbar, in R nicht
Eigenwerte: $\{i, i, -i, -i\}$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} -\frac{5}{29} - \frac{2i}{29} & \frac{17}{29} + \frac{i}{29} & -\frac{5}{29} + \frac{2i}{29} & \frac{17}{29} - \frac{i}{29} \\ \frac{13}{58} + \frac{11i}{58} & \frac{37}{58} + \frac{9i}{58} & \frac{13}{58} - \frac{11i}{58} & \frac{37}{58} - \frac{9i}{58} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang = 4, Defekt = 0, Kern = 0, Bild = V

$$T_3^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 5 & 0 \\ -11 & -4 & 9 & -1 \\ 9 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante: 0
Charakteristisches Polynom: $x - x^3$
Minimalpolynom: $x - x^3 = \text{Char(T)}$
In R und C diagonalisierbar
In C und R trigonalisierbar
Eigenwerte: $\{-1, 1, 0\}$
Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rang = 2, Defekt = 1, Kern = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Bild = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
Nicht invertierbar

$$T_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -16 & 3 & 9 & -3 \\ -10 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante: 48
Charakteristisches Polynom: $48 - 76x + 44x^2 - 11x^3 + x^4 =$ (x-2)^2(x-3)^2
Minimalpolynom: $48 - 76x + 44x^2 - 11x^3 + x^4 =$ (x-2)^2(x-1)
Nicht diagonalisierbar
In C und R trigonalisierbar
Eigenwerte: $\{4, 3, 2, 2\}$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang = 4, Defekt = 0, Kern = 0, Bild = V

$$T_5^{-1} = 1/6 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 8 & \frac{3}{2} & -4 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 & 5 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$