Die Glättungseigenschaft bei der Zeitdiskretisierung parabolischer Gleichungen mit Galerkin-Verfahren über Spektralmethoden

David Rohr

3.7.2008

Basiert auf: **Single Step Galerkin Approximations for Parabolic Problems (1977)**
Garth A. Baker, James H. Bramble, Vidar Thomée

Inhaltsverzeichnis

1 Problembeschreibung

Im Folgenden wollen wir die Regularität der Lösung des folgenden Anfangsrandwertproblems untersuchen. Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ hinreichend glatt, a_{jk} und a_0 seien von t unabhängige, hinreichend glatte Funktionen, die Matrix $(a_{jk})_{jk}$ sei symmetrisch und positiv definit sowie $a_0 \geq 0$ auf $\bar{\Omega}$ und $v \in L^2(\Omega)$.

$$\mathbf{D_t}u = \frac{\partial}{\partial t}u = -\mathbf{L}u = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - a_u u \qquad \text{auf } \Omega \times (0, t^*]$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 && \forall\ x \in \partial\Omega, t \in (0, t^*] \\ u(x,0) &= v(x) && \forall\ x \in \Omega \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass wir an die Anfangsdaten v keinerlei Regularitätsvoraussetzungen stellen. Wir fordern lediglich $v \in L^2(\Omega)$. Das genaue Aussehen des Operators $\mathbf{L}$ ist im Folgenden nicht mehr wichtig, es ist einzig essentiell, dass $\mathbf{L}$ positiv definit ist. Zur Vereinfachung stelle man sich einfach den Laplace-Operator vor. (Dieser ist offenbar symmetrisch und positiv definit).

2 Räumliche Diskretisierung

Wir werden das Problem in Zeit und Raum diskretisieren. Für die räumliche Diskretisierung verwenden wir Galerkin-Verfahren. 1977 veröffentlichten Bramble, Schatz, Thomée und Wahlbin in "Some convergence estimates for Galerkin type approximations for parabolic equations" Fehlerabschätzungen für die räumliche Diskretisierung. Wir werden hier deren Ergebnisse kurz wiederholen und danach unter Einbezug der Ergebnisse eine Fehlerabschätzung auch für die Zeitdiskretisierung beweisen.

2.1 Umformulierung des Problems

Zunächst werden wir das Problem etwas umformulieren. Wir betrachten das eliptische Problem:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\omega &= f && \text{in } \Omega \\ \omega &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dies ist bekanntermaßen lösbar mit dem Lösungsoperator $\mathbf{T}$, so dass:

$$\mathbf{T}f = \omega$$

Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass die Inverse des Laplace-Operators ein kompakter stetiger selbstadjungierter Operator ist: $(-\Delta)^{-1} : L^2 \to L^2$. Ein analoges Resultat gilt auch für allgemeines $\mathbf{L}$.

Mit $\mathbf{T}$ können wir das ursprüngliche Problem $\mathbf{D_t}u = -\mathbf{L}u$ nun umschreiben:

$$\mathbf{D_t}u = -\mathbf{L}u \Longleftrightarrow \mathbf{D_t}\mathbf{T}u = -u$$

Nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren gibt es also ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenwerten $\tilde{\lambda}_j$ und Eigenfunktionen ϕ_j, so dass:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\phi_j &= \tilde{\lambda}_j \phi_j \ , \\ < \phi_i, \phi_j >_{L^2} &= \delta_{ij} \ , \\ \mathbf{T}f = \omega &= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_j < f, \phi_j >_{L^2} \phi_j \ . \end{aligned}$$

Mit den inversen Eigenwerten $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j^{-1}$ lautet das Problem:

$$\mathbf{D_t}u = -\mathbf{L}u = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < u, \phi_j >_{L^2} \phi_j$$

Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\|w\|_s = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \cdot < w, \phi_j >_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für $s = 0$ gilt offenbar $\|w\|_s = \|w\|_{L^2}$. Sei nun

$$\dot{H}^s(\Omega) = \left\{ \omega \in L^2(\Omega) : \|\omega\|_s < \infty \right\} .$$

$\mathbf{T}$ ist ein beschränkter kompakter Operater von $\dot{H}^s$ nach $\dot{H}^{s+2}$. Wäre $\mathbf{L}$ selbst ein kompakter Operator, könnte man die $\|\cdot\|_s$-Norm abschätzen durch $\|\omega\|_s \leq \|\omega\|_{L^2} \cdot \|\mathbf{L}\|^s$. Da aber die Eigenwerte λ_i nach dem Spektralsatz unbeschränkt sind (zumindest im unendlich dimensionalen Fall), kann $\mathbf{L}$ kein kompakter Operator sein. Jedoch wird die $\|\cdot\|_s$-Norm in der zitierten Abschätzung für die Raumdiskretisierung nur kurz benutzt. Sie sei deshalb hier kurz erwähnt, bei der Abschätzung für die Zeitdiskretisierung werden wir sie jedoch nicht brauchen.

2.2 Exakte Lösung

Wir können nun die exakte Lösung für unser Problem $\mathbf{D_t}u = -\mathbf{L}u$ direkt angeben:

$$u(t) = e^{-\mathbf{L}t}v \ ,$$

wobei $\exp(-\mathbf{L}t)$ definiert ist durch

$$e^{-\mathbf{L}t}v = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i(-\mathbf{L})^i v}{i!} \ .$$

Für eine Konvergenzbetrachtung analysieren wir dies auf den Eigenräumen (offenbar sind nach Definition die Eigenfunktionen von $\mathbf{L}$ auch Eigenfunktionen von $e^{-\mathbf{L}t}$):

$$e^{-\mathbf{L}t}v = \sum_{i=1}^{\infty} < v, \phi_j >_{L^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i(-\mathbf{L})^i \phi_j}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} < v, \phi_j >_{L^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i(-\lambda_j)^i}{i!}\phi_j = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} < v, \phi_j >_{L^2} \phi_j$$

Aus dem Spektralsatz angewendet auf $\mathbf{T}$ folgt:

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{\lambda}_j = 0 \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$$

Für große j gilt dann aber:

$$e^{-\lambda_j t} < \frac{1}{\lambda_j} = \tilde{\lambda}_j$$

Obige Reihe wird also majoriert von der nach dem Spektralsatz konvergenten Reihe:

$$\mathbf{T}u = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_j < u, \phi_j > \phi_j$$

Dass dies das Problem nun auch wirklich löst, sieht man leicht, denn:

$$\mathbf{D_t}u = \frac{\partial}{\partial t} e^{-\mathbf{L}t}v = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i(-\mathbf{L})^i v}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{t^i(-\mathbf{L})^i v}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{it^{i-1}(-\mathbf{L})(-\mathbf{L})^{i-1}v}{i!} = -\mathbf{L}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}(-\mathbf{L})^{i-1}v}{(i-1)!} = -\mathbf{L}u$$

2.3 Galerkin Diskretisierung

Wir wollen das Problem nun mit Galerkin-Methoden (z. B. Finite Elemente) diskretisieren. Zu diesem Zweck sei $\{S_h\}_{h>0}$ eine Familie endlich dimensionaler Unterräume von $L^2(\Omega)$. Weiterhin fordern wir die Existenz von Operatoren:

$$\mathbf{T_h} : L_2 \to S_h$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathbf{T_h}$ sei selbstadjungiert, positiv definit auf S_h und positiv semidefinit auf $L_2(\Omega)$.

(ii) $\exists r \geq 2, C \in \mathbb{R} : \|(\mathbf{T_h} - \mathbf{T})v\| \leq Ch^{q+2}\|v\|_q \quad \forall\ 0 \leq q \leq r-2$

(Im Falle Finiter Elemente z. B. wäre h der Gitterabstand, r die Ordnung. Setzt man $r = 2$ und damit $q = 0$, so ist $\|v\|_q = \|v\|_{L^2}$ und wir erhalten die bekannte a priori-Abschätzung für Finite Elemente Methoden zweiter Ordnung.)

Damit betrachten wir nun das semidiskrete (räumlich diskret, zeitlich kontinuierlich) Problem:

$$\mathbf{D_t T_h} u_h(t) = -u_h(t) \quad \forall\ 0 < t \leq t^*$$
$$u_h(0) = \mathbf{P_0}v$$

mit $u_h \in S_h$ sowie $\mathbf{P_0}$ die Projektion auf S_h in $L^2(\Omega)$.

Mit dem zu $\mathbf{T_h}$ inversen Operator $\mathbf{L_h} = \mathbf{T_h}^{-1}$ (dieser existiert auf S_h, da $\mathbf{T_h}$ positiv definit) ist das Problem äquivalent zu

$$\mathbf{D_t} u_h(t) = -\mathbf{L_h} u_h(t) \quad \forall\, 0 < t \leq t^*, \qquad u_h(0) = \mathbf{P_0} v \ .$$

Analog zum kontinuirlichen Fall ist die exakte Lösung

$$u_h(t) = e^{-\mathbf{L_h} t} \mathbf{P_0} v = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\Lambda_j t} < v, \Phi_j > \Phi_j \ ,$$

wobei Λ_j und Φ_j Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathbf{L_h}$ sind. Hierbei sind natürlich die Λ_j genau die Inversen der Eigenwerte von $\mathbf{T_h}$.
($\mathbf{P_0}$ taucht hier nicht auf, da das L^2-Skalarprodukt automatisch auf S_h projiziert.)

2.4 Fehlerabschätzung

In der oben genannten Veröffentlichung wurde mit der Energiemethode unter den gegebenen Voraussetzungen gezeigt, dass

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C h^s \|v\|_s \qquad \forall\, 0 \leq s \leq r, 0 < t \leq t^* \ .$$

Mit Spektralmethoden wurde weiterhin folgende Fehlerabschätzung bewiesen:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C h^r t^{-r/2} \|v\| \qquad \forall\, 0 < t \leq t^*$$

In unserem Beispiel vorhin mit $r = 2$ und Finiten Elementen erhält man also einen Faktor h^2/t. Die Fehlerordnung vom Grad 2 bleibt erhalten, was auch das beste ist, das man erwarten konnte. Bei $t = 0$ erhält man einen Pol. Auch dies ist klar, da die Anfangsdaten wie schon erwähnt nur aus L^2 gefordert sind. Nimmt man Anfangsdaten mit mehr Regularität, z. b. $v \in H^{2,2}$, kann man auch eine beschränkte Fehlernorm bis hin zu $t = 0$ erhalten.

3 Zeitdiskretisierung

3.1 Formulierung

Im Folgenden wird U^n die diskrete Annäherung an die exakte Lösung $u(t)$ des Problems sein. Die Zeitdiskretisierung verläuft in Zeitintervallen der Länge k, so dass also $t_n = nk$. Es gilt also für die exakte Lösung U^n_{**}:

$$U^n_{**} = e^{-nk\mathbf{L}} v = u(nk)$$

Benutzen wir die Galerkin-Näherung, erhalten wir für U^n_*:

$$U^n_* = e^{-nk\mathbf{L_h}} \mathbf{P_0} v = u_h(nk)$$

Aufgrund der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergibt sich damit:

$$U^{n+1}_* = e^{-k\mathbf{L_h}} U^n_*$$

Für die Zeitdiskretisierung wird nun die Exponentialfunktion $e^{-\tau}$ durch rationale Funktionen $r(\tau)$ genähert werden:

$$U^n = \mathbf{r}(-nk\mathbf{L_h}) \mathbf{P_0} \approx e^{-nk\mathbf{L_h}} \mathbf{P_0} v = U^n_*$$

Wir erhalten damit folgende Rekursionsformel für die Näherungslösungen U^n:

$$U^0 = \mathbf{P_0} v$$
$$U^{n+1} = \mathbf{r}(k\mathbf{L_h}) U^n$$

$r(\tau)$ sei eine Näherung an $e^{-\tau}$ in dem Sinne, dass

$$r(\tau) = e^{-\tau} + O(\tau^{\nu+1}) \qquad \text{mit } \nu \geq 1 \ .$$

Damit obige Rekursion wohldefiniert ist, fordern wir zudem, dass $r(\tau)$ keinen Pol hat für $\tau = k \cdot \Lambda_j$.

Für den Fall, dass $\mathbf{T_h}$ anstatt von $\mathbf{L_h}$ gegeben ist, betrachtet man $\mathbf{r}(k\mathbf{L_h})$ als rationale Funktion von $\mathbf{T_h}$ bzw. die Funktion $r(\frac{k}{\mu})$ in Abhängigkeit von μ. Sei also

$$r\left(\frac{k}{\mu}\right) = \frac{\alpha_0 \prod_{j=1}^{N} (\mu - \beta_j)}{\prod_{j=1}^{M} (\mu - \gamma_j)} \ .$$

In dieser faktorisierten Schreibweise gilt natürlich $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$. Ferner ist $\mathbf{r}(k/\mathbf{T_h})$ natürlich selbst wieder als Operator zu verstehen, dies wollen wir nun genauer erklären (um die Schreibweise einfach zu halten, wieder für den Fall $\mathbf{L_h}$ gegeben).
Analog zur Exponentialfunktion auf die Eigenwerte angewandt ($e^{-\mathbf{L_h}t}v = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} < v, \phi_j >_{L^2} \phi_j$), definieren wir:

$$\mathbf{r}(-\mathbf{L}t)v = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_0 \prod_{i=1}^{N}(\lambda_j - \beta_i)}{\prod_{i=1}^{M}(\lambda_j - \gamma_i)} < v, \phi_j >_{L^2} \phi_j$$

Für die Rekursion ergibt sich somit:

$$\sum_{j=1}^{\infty} < U^{n+1}, \Phi_j >_{L^2} \Phi_j = U^{n+1} = \mathbf{r}(k\mathbf{L_h})U^n = \sum_{j=1}^{\infty} r(\Lambda_j) < U^n, \Phi_j >_{L^2} \Phi_j$$

Aufgrund der Orthogonalität der Φ_j müssen die Summanden komponentenweise übereinstimmen, also:

$$< U^{n+1}, \Phi_j >_{L^2} = r(\Lambda_j) < U^n, \Phi_j >_{L^2} = \frac{\alpha_0 \prod_{i=1}^{N}(\Lambda_j - \beta_i)}{\prod_{i=1}^{M}(\Lambda_j - \gamma_i)} < U^n, \Phi_j >_{L^2} \quad \forall\ j$$

$$\iff \quad \prod_{i=1}^{M}(\Lambda_j - \gamma_i) < U^{n+1}, \Phi_j >_{L^2} = \alpha_0 \prod_{i=1}^{N}(\Lambda_j - \beta_i) < U^n, \Phi_j >_{L^2} \quad \forall\ j$$

Durch Multiplikation mit Φ_j und anschließender Summation über j erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{M}(\Lambda_j - \gamma_i) < U^{n+1}, \Phi_j >_{L^2} \Phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_0 \prod_{i=1}^{N}(\Lambda_j - \beta_i) < U^n, \Phi_j >_{L^2} \Phi_j$$

$$\iff \prod_{i=1}^{M}(\mathbf{L_h} - \gamma_i)U^{n+1} = \alpha_0 \prod_{i=1}^{N}(\mathbf{L_h} - \beta_i)U^n$$

Oder alternativ mit $\mathbf{T_h}$ (natürlich mit anderen $\alpha_0, \beta_i, \gamma_i$):

$$\prod_{j=1}^{N}(\mathbf{T_h} - \gamma_j)U^{n+1} = \alpha_0 \prod_{j=1}^{M}(\mathbf{T_h} - \beta_j)U^n$$

Dies kann man nun lösen, indem man eine Folge von Gleichungen der Form

$$(\alpha \mathbf{T_h} + \beta)W = (\gamma \mathbf{T_h} + \delta)V$$

für gegebenes V nach W löst. $\mathbf{T_h}$ wird hierbei für $z \in \mathbb{C}$ linear definiert durch $\mathbf{T_h}(z) = \mathbf{T_h}(x + iy) = \mathbf{T_h}(x) + i \cdot \mathbf{T_h}(y)$

3.2 Rationale Näherungstypen

Wir betrachten im Folgenden wie schon erwähnt rationale Näherungen $r(t) \approx e^{-t}$. Die Näherung $r(\tau)$ sei vom Typ I bzw. II wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(I)

$$|r(\tau)| < 1 \quad \forall\ 0 < \tau < \tau_0 \quad (\text{mit } \tau_0 > 0) \quad \text{und} \quad k\Lambda_{\max} \leq \alpha_0 \quad \text{mit } 0 < \alpha_0 < \tau_0$$

(II)

$$\sup_{\tau > \delta} |r(\tau)| < 1 \quad \forall\ \delta > 0$$

(Zu I: Da S_h endlich dimensional existiert ein größter Eigenwert $\Lambda_{\max}$.)

Für den Typ I gilt es nun Folgendes zu beachten: Wegen $k\Lambda_{\max} \leq \tau_0$ ist die Konstante τ_0 von der Schrittweite und von den Eigenwerten abhängig. Verfeinert man die räumliche Diskretisierung (durch kleineres h), nimmt die Dimension von S_h zu und es gibt größere Eigenwerte. Im Allgemeinen gilt $\Lambda_{\max} \approx h^{-o}$, wobei o dir Ordnung des Differentialoperators, d. h. in unserem Fall $o = 2$. Setzt man dies zusammen, erhält man $k \cdot h^{-2} \leq \tau_0$. Will man also ein festes r einsetzen, so sind (da τ_0 fest) die Schrittweiten für Zeit- und Raumdiskretisierung gekoppelt. Allerdings ist die quadratische Abhängigkeit inakzeptabel, wodurch der Typ I in der Praxis uninteressant ist. Da später unser Beweis für die Fehlerabschätzung für Typ II aber auf Typ I basieren wird, muss er hier definiert werden.

Ein Beispiel für Typ I ist z. B. die Trapez-Regel angewendet auf das Modelproblem: ($U^{n+1} = U^n + \frac{1}{2}\lambda(U^n + U^{n+1})$)

$$r(\tau) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}}{1 + \frac{\tau}{2}}$$

Diese ist offenbar eine Näherung der Ordnung 3 and die Exponentialfunktion $e^{-\tau}$ und für $0 < \tau < \infty$ gilt: $|r(\tau)| < 1$. Allerdings gilt nach der Regel von Bernoulli-l'Hospital:

$$\lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\tau>\delta} |r(\tau)| = 1 \quad \forall\ \delta$$

Die Trapezregel erfüllt also nicht die Voraussetzungen für Typ II. Für Typ II ist eine stark A-stabile Methode nötig. Ein einfaches Beispiel ist die implizite Euler Formel: $(U^{n+1} = U^n + \lambda U^{n+1})$

$$r(\tau) = \frac{1}{\tau - 1}$$

Hier gilt offenbar $|r(\tau)| < 0$ für $0 < \tau < \infty$ und $\lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = 0$

4 Fehlerabschätzung

4.1 L^2-Fehlerabschätzung

Zuerst wollen wir eine L^2-Abschätzung des Fehlers zwischen semidiskreter (räumlich diskretisiert) und vollständig diskreter (auch zeitlich diskretisiert) Lösung.

Theorem 1: *Erfülle die rationale Funktion der Zeitdiskretisierung die obigen Voraussetzungen. Dann gilt für $0 < t = nk \leq t^*$:*

$$\|U^n - u_h(nk)\| \leq Ck^\nu t^{-\nu} \|v\|$$

Beweis:
Sei σ_h das Spektrum von $\mathbf{L_h} = \mathbf{T_h}^{-1}$. Für eine Funktion $g : \sigma_h \to X$ führen wir folgende Notation ein:

$$\mathbf{g}(\mathbf{L_h})v = \sum_{\Lambda_h \in \sigma_h} g(\Lambda_j) < v, \Phi_j >_{L^2} \Phi_j = \mathbf{g}(\mathbf{L_h})\mathbf{P_0}v$$

Weiterhin sei

$$F_n(\tau) = r(\tau)^n - e^{-n\tau}\ .$$

Damit können wir nun schreiben:

$$U^n - u_h(nk) = \mathbf{F_n}(k\mathbf{L_h})v$$

Mit der Parsevalschen Gleichung:

$$\|v\|_X^2 =< v, v >_X = \sum_{s\in S} | < v, s >_X |^2 \Longleftrightarrow S \text{ istOrthonormalbasis}$$

erhalten wir für die Operatornorm

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{L_h})\| = \sup_{\tau\in\sigma_h} |g(\tau)|\ ,$$

denn:

- $\|\mathbf{g}(\mathbf{L_h})\| \geq \sup_{\tau\in\sigma_h} |g(\tau)|$:

  Betrachte eine Folge $\Lambda_{j_k} \to \sup_{\tau\in\sigma_h} |g(\tau)|$
  $\Longrightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{L_h})\| \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{L_h})\Phi_{j_k}\|_{L^2}}{\|\Phi_{j_k}\|_{L^2}} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{|g(\Lambda_{j_k})|\|\Phi_{j_k}\|_{L^2}}{\|\Phi_{j_k}\|_{L^2}} = \sup_{\tau\in\sigma_h} |g(\tau)|$

- $\|\mathbf{g}(\mathbf{L_h})\| \leq \sup_{\tau\in\sigma_h} |g(\tau)|$:

  Sei $v = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \Phi_j \Longrightarrow \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{L_h})v\|_{L^2}}{\|v\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \|g(\Lambda_j)\alpha_j\Phi_j\|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \|C\alpha_j\Phi_j\|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2}} \leq C \cdot \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \alpha_j^2}} \leq C$

  mit $C = \sup_{\tau\in\sigma_h} |g(\tau)|$

Die Behauptung folg nun aus folgendem Lemma:

Lemma 1: *Mit den obigen Definitionen gilt für $0 < t = nk \leq t^*$:*

$$\|\mathbf{F_n}(k\mathbf{L_h})\| \leq Ck^\nu t^{-\nu}$$

Beweis:
Nach der Parsevalschen Gleichung gilt:

$$\sup_{\lambda\in\sigma_h} |F_n(k\lambda)| = \sup_{\tau/k\in\sigma_h} |F_n(\tau)| = \|\mathbf{F_n}(k\mathbf{L_h})\|$$

Wir müssen also nur zeigen, dass

$$|F_n(\tau)| \leq C \cdot n^{\nu} \qquad \forall n = \frac{t}{k} \ .$$

Betrachten wir zuerst $r(\tau)$ vom Typ I, wobei wir τ_0 groß genug wählen, so dass $k\lambda \leq \tau_0 \ \forall \lambda \in \sigma_h$.
Also:

$$|r(\tau)| < 1 \qquad \text{und} \qquad |r(\tau) - e^{-\tau}| \leq C \cdot \tau^{\nu+1} \quad \forall 0 < \tau \leq \tau_0$$

Letzteres können wir annehmen, da ja $r(\tau) = e^{-\tau} + O(\tau^{\nu+1})$.
Damit gilt auch:

$$|r(\tau)| \leq e^{-c\tau} \qquad \text{mit } 0 < c < 1$$

Dies ist allerdings nicht direkt offensichtlich. Mit $|r(\tau) - e^{-\tau}| \leq C \cdot \tau^{\nu+1}$ gilt zunächst:

$$\frac{\partial r(\tau)}{\partial \tau}(0) = \frac{\partial e^{-\tau}}{\partial \tau}(0) < \frac{\partial e^{-c\tau}}{\partial \tau}(0) \quad \forall\ 0 < c < 1$$

$$\Rightarrow \quad \exists\ \tau_1 : |r(\tau)| = r(\tau) \leq e^{-c\tau}\ \forall\ 0 < \tau \leq \tau_1,\ 0 < c < 1$$

Sei jetzt ein solches $\hat{c}$ fest gewählt und τ_1 entsprechend.
Für $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$ gilt nun aber $|r(\tau)| < 1$ und $|r|$ ist als Betrag einer rationalen Funktion ohne Pole stetig und nimmt daher ein Maximum m_0 auf dem Kompaktum $[\tau_1, \tau_0]$ an. Wähle nun $\tilde{c}$ so, dass $1 > e^{-\tilde{c}\tau_0} \geq m_0 \geq |r(\tau)| \ \ \forall\ \tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$.
Mit $c = \min(\hat{c}, \tilde{c}) > 0$ folgt nun die Behauptung.

Wir zerlegen $F_n(\tau)$ nun in eine Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} F_n(\tau) &= r(\tau)^n - r(\tau)^{n-1}e^{-\tau} + r(\tau)^{n-1}e^{-\tau} - r(\tau)^{n-2}e^{-2\tau} + r(\tau)^{n-2}e^{-2\tau} - ... - r(\tau)e^{-(n-1)\tau} + r(\tau)e^{-(n-1)\tau} - e^{-n\tau} \\ &= (r(\tau) - e^{-\tau}) \sum_{l=0}^{n-1} r(\tau)^{n-l-1} e^{-l\tau} \end{aligned}$$

Damit gilt nun durch Einsetzen:
(Im Folgenden sei C jeweils eine Konstante, die nicht von wesentlichen Größen abhängt. C ist aber keine feste Konstante und kann von Abschätzung zu Abschätzung unterschiedlich sein!)

$$\begin{aligned} |F_n(\tau)| &= \left| (r(\tau) - e^{-\tau}) \sum_{l=0}^{n-1} r(\tau)^{n-l-1} e^{-l\tau} \right| \\ &\leq \left| (C \cdot \tau^{\nu+1}) \sum_{l=0}^{n-1} (e^{-c\tau})^{n-l-1} e^{-l\tau} \right| \\ &\leq (C \cdot \tau^{\nu+1}) \sum_{l=0}^{n-1} e^{-c(n-1)\tau} e^{c\ l\tau} e^{-c\ l\tau} \\ &\leq C \cdot \tau^{\nu+1} \cdot n \cdot e^{-c(n-1)\tau} \leq C \cdot n \cdot e^{-cn\tau} \\ &\leq C n^{-\nu} \end{aligned}$$

Der Faktor $\tau^{\nu+1}e^{c\tau}$ kann durch $\tau_0^{\nu+1}e^{c\tau_0}$ abgeschätzt werden, und steckt dann in der Konstanten C.
Weiterhin fällt die Exponentialfunktion $(e^{-cn\tau})$ schneller als jede Potenz $(n^{-\nu})$ in Abhängigkeit von n.
Damit wäre die Behauptung für Näherungen vom Typ I gezeigt. Die Konstante C hängt hierbei von τ_0 ab, dies hängt wiederrum von $k\Lambda_{\max}$ also von der Schrittweite ab. Wir werden im Folgenden für Typ II zeigen, dass die Schrittweitenabhängigkeit wegfällt.

Für Typ II müssen wir auch den Fall betrachten, dass τ groß ist. Sei also $\tau > 1$.
(Den Fall für $\tau \leq 1$ erhalten wir aus der Abschätzung für den Typ I mit $\tau_0 = 1$ und dem entsprechenden C.)
Wir erhalten

$$e^{-n\tau} \leq e^{-n} \leq C_1 \cdot n^{-\nu}$$

und

$$\sup_{\tau \geq 1} \leq e^{-c} < 1 \qquad \text{mit } c > 0 \ .$$

Daraus folgt dann auch

$$|r(\tau)^n| \leq e^{-cn} \leq C_2 \cdot n^{-\nu}$$

und mit der Dreiecksungleichung

$$|r(\tau)^n - e^{-n\tau}| \leq |r(\tau)^n| + |e^{-n\tau}| \leq (C_1 + C_2) n^{-\nu} = C n^{-\nu} \ .$$

□

Durch Kombination mit der semidiskreten Abschätzung folg nun sofort:
Theorem 2: *Erfülle die rationale Funktion der Zeitdiskretisierung die obigen Voraussetzungen. Dann gilt für* $0 < t = nk \leq t^*$*:*

$$\|U^n - u(nk)\|_{L^2} \leq C \cdot (h^r t^{-r/2} + k^\nu t^{-\nu})\|v\|_{L^2}$$

Beweis:
Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned}\|U^n - u(nk)\|_{L^2} &\leq \|U^n - u_h(nk)\|_{L^2} + \|u_h(nk) - u(nk)\|_{L^2} \\ &\leq C \cdot k^\nu t^{-\nu}\|v\|_{L^2} + C \cdot h^r t^{-r/2}\|v\|_{L^2} \\ &= C \cdot (h^r t^{-r/2} + k^\nu t^{-\nu})\|v\|_{L^2}\end{aligned}$$

□

5 Ausblick

Im weiteren Verlauf des Papers werden Abschätzungen für $0 \leq t \leq t^*$ bewiesen. Diese setzen natürlich glatte Anfangsdaten für $t = 0$ voraus, und fallen deshalb hier aus dem Rahmen, weil die oben erwähnte Glättungseigenschaft für glatte Anfangsdaten nicht mehr von Belang ist. Der Vollständigkeit halber sei die erste hier noch erwähnt. Dies ist im übrigen das vollständig diskrete Analogon zur ersten semidiskreten Abschätzung in der $\|\cdot\|_s$ Norm.

$$\|U^n - u(nk)\| \leq C(h^r\|v\|_r + k^\nu\|v\|_{2\nu}) \quad \forall 0 \leq t = nk \leq t^*, v \in H^{2,2}(\Omega)$$