## Normrestsymbol:

**Definition 1** *Sei $k$ ein lokaler Körper, $\alpha \in k \setminus k^n$, $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$, $G = Gal(K/k)$, $\zeta_n$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel und $\mu_n \subset k$ die Gruppe der $n$-ten Einheitswurzeln. Für $g \in G, a \in K$ ergibt sich*

$$g(\sqrt[n]{a}) = \zeta_n^{k_{g,a}} \sqrt[n]{a}$$

*mit $k_{g,a} \in \mathbb{N}$. Sei nun $\chi_a \in \chi(G)$ der Charakter, mit $\chi_a(g) = k_{g,a}$. Dies ergibt eine Abbildung*

$$\phi : k^* \to \chi(G) = H^1(G, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) : \phi(a) = \chi_a.$$

**Definition 2** *Sei $k$ ein lokaler Körper, $\hat{k}$ die maximale $p$-Erweiterung. Aus der Kummersequenz*

$$0 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} \hat{k}^* \xrightarrow{q} \hat{k}^* \to 0$$

*mit*

$$\lambda(a) = \zeta_n^a, q(a) = a^q$$

*ergibt sich die lange exakte Kohomologiesequenz*

$$H^1(G, \hat{k}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(G, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \xrightarrow{\lambda^*} H^2(G, \hat{k}^*) \xrightarrow{q} H^2(G, \hat{k}^*).$$

*Mit $H^1(G, \hat{k}^*) = 0$ folgt, dass*

$$\lambda^* : H^2(G, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^2(G, \hat{k}^*)[q]$$

*ein Isomorphismus ist. Dis Zusammensetzung mit*

$$\iota : H^2(G, \hat{k}^*) \to \mu_q : \iota(\epsilon) = \zeta_q^{q \cdot inv_k(\epsilon)}$$

*ergibt einen Isomorphismus $\psi = \iota \circ \lambda^*$*

$$\psi : H^2(G, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \to \mu_q.$$

**Definition 3** *Sei $(\cdot, K/k) : K^* \to G$ das Normrestsymbol.*

$$\Rightarrow (\beta, k(\sqrt[n]{\alpha})/k)(\sqrt[n]{\alpha}) = \zeta_n^k \cdot \sqrt[n]{\alpha} \text{ für } \beta \in k^*.$$

*Dies definiert eine Abbildung:*

$$(\cdot, \cdot) : k^* \times k^* \to \mu_q \text{ durch } (\beta, k(\sqrt[n]{\alpha})/k)(\sqrt[n]{\alpha}) = (\alpha, \beta) \cdot \sqrt[n]{\alpha}$$

**Theorem 4** *Die oben definierte Abbildung ist antisymmetrisch und billinear. Es gelten folgende Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot \alpha', \beta) &= (\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta) \\
(\alpha, \beta \cdot \beta') &= (\alpha, \beta) \cdot (\alpha, \beta') \\
(\alpha, \beta) &= (\beta, \alpha)^{-1} \\
(\alpha, \beta) &= 1 \Leftrightarrow \beta \in N_{K/k} K^* \\
(\alpha, \beta) &= 1 \ \forall \beta \in k^* \Leftrightarrow \alpha \in k^{*n} \\
(\alpha, \beta) &= (\psi(\phi(\alpha) \cup \phi(\beta)))^{-1}
\end{aligned}$$