Dedekindsche Zetafunktionen und verallgemeinerte Dirichletsche L-Reihen

Felix Lenders David Rohr

In diesem Vortrag betrachten wir Verallgemeinerungen der Riemannschen ζ-Funktion und L-Funktionen, die zu Zahlkörpern gebildet werden. Für sie findet man analog wie bei der Riemannschen ζ-Funktion eine Darstellung als Euler-Produkt als Ausdruck der eindeutigen Zerlegung von Idealen in Primideale.

Im letzten Vortrag haben wir $j(\mathfrak{K}, t) = \rho_{\mathfrak{m}} t + O(t^{1-\frac{1}{n}})$ gesehen mit einer aus arithmetischen Größen des Zahlkörpers gebildeten Zahl $\rho_{\mathfrak{m}}$. Es wird sich herausstellen, dass sich $\rho_{\mathfrak{m}}$ auf analytische Weise aus den ζ-Funktionen eines Zahlkörpers gewinnen lässt und somit eine Brücke zwischen arithmetischen Eigenschaften des Zahlkörpers und analytischen Größen ergibt.

Weiterhin werden wir L-Reihen nutzen, um das Zerlegungsverhalten von Primstellen in galoisschen Erweiterungen zu studieren und einen alternativen analytischen Beweis der zweiten fundamentalen Ungleichung zu geben.

Notationen Im folgenden bezeichne stets

- k einen Zahlkörper mit $n := [k : \mathbb{Q}]$,
- $\mathfrak{a}$ ein *ganzes* Ideal von k, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k,
- $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$ einen Modul von k,
- $\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden gebrochenen Ideale,
- $H_0^{\mathfrak{m}}$ den Strahl mod $\mathfrak{m}$,
- $Cl^{\mathfrak{m}} = \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H_0^{\mathfrak{m}}$ die Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{m}$,
- $h_{\mathfrak{m}}$ die Ordnung von $Cl^{\mathfrak{m}}$,
- $s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \sigma = \operatorname{Re} s,\ t = \operatorname{Im} s$.

1 Zetafunktionen

Definition 1.

i) Sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$. Sei

$$\zeta_k(s) := \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}, \quad \zeta_k(s, \mathfrak{m}) := \sum_{\substack{\mathfrak{a}, \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{m})=1}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}.$$

Die Reihe $\zeta_k(s)$ heißt *Dedekindsche Zetafunktion von k.*

ii) Sei $\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}$ verallgemeinerte Idealklasse. Dann heißt

$$\zeta(s, \mathfrak{K}) := \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$$

partielle Zetafunktion.

Offenbar gilt $\zeta_k(s) = \zeta_k(s, 1)$ und $\zeta_k(s, \mathfrak{m}) = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \zeta(s, \mathfrak{K})$.

Satz 2 (Euler-Produkt)**.** *$\zeta_k(s,\mathfrak{m})$ ist gleichmäßig konvergent auf Kompakta für $\sigma > 1$ und dort holomorph. Es gilt die Eulersche Produktformel*

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}.$$

Beweis. Formales Logarithmieren von

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}$$

liefert unter Beachtung von $\log(1-x) = -\sum_{\nu\geq 1}\frac{x^\nu}{\nu}$ die Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{\nu\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}.$$

Da $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \geq p$ falls $\mathfrak{p} \mid p$ ist $\left|\sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{\nu\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}\right| \leq \sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{\nu p^\sigma}$ und da es höchstens $n = [k:\mathbb{Q}]$ über p liegende Primideale gibt, gilt dann

$$\left|\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{\nu\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}\right| \leq n\sum_{p}\sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{\nu p^\sigma} = n\log\zeta(\sigma) < \infty.$$

Nach Resultaten der Funktionentheorie ist daher

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}$$

konvergent; erst recht auch $\prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}$. Für $N \in \mathbb{N}$ seien nun $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ diejenigen Primideale mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i) \leq N$ und $\mathfrak{p}_i \nmid \mathfrak{m}$ sowie $\mathcal{J}_N$ die Menge aller ganzen Ideale, in deren Primzerlegung nur $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ vorkommt. Dann ist

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^r \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^s}} &= \prod_{i=1}^r\sum_{j_i\geq 0}\left(\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^\sigma}\right)^{j_i} = \sum_{j_1,\ldots,j_r\geq 0}\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^r\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^{j_i}\right)^\sigma}\\ &= \sum_{\mathfrak{a}\in J_N}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^\sigma} = \sum_{\substack{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1,\\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\leq N}}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^\sigma} + \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in J_N,\\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a})>N}}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^\sigma}\end{aligned}$$

und somit

$$\left|\sum_{\substack{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1,\\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\leq N}}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}\right| \leq \sum_{\mathfrak{a}\in J_N}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^\sigma} = \prod_{i=1}^r\frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^\sigma}} \leq \prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^\sigma}} < \infty,$$

also konvergiert $\zeta_k(s, \mathfrak{m})$ gleichmäßig auf Kompakta und ist dort holomorph. Ferner gilt wegen

$$\left| \prod_{1 \le i \le r} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^s}} - \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} \right| \le \sum_{\substack{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1,\\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \ge N}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^\sigma} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

dann auch

$$\zeta_k(s, \mathfrak{m}) = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}. \qquad \square$$

Beispiel 3. Offenbar ist $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion.

Im Fall des Kreisteilungskörpers $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, ζ_m primitive m-te Einheitswurzel erhält man $\zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_m)}(s) = \left(\prod_{\mathfrak{p}|m} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}} \right) \prod_\chi L(\chi, s)$, wobei χ die Charaktere von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ durchlaufe. Dies zeigt abermals $L(1, \chi) \neq 0$ falls $\chi \neq 0$.

Beweis. In $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ zerlegt eine Primzahl p sich als $(p) = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r)^e$. Ist $p \nmid m$, so ist der Trägheitsgrad $f(p)$ von $\mathfrak{p}_i$ gerade gegeben durch die Ordnung von $p \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und $e = 1$. Wegen $ef(p)r = \varphi(m)$ gilt dann mit $g(p) = r = \frac{\varphi(m)}{f(p)}$

$$\prod_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^{f(p)s}}\right)^{g(p)}}.$$

Nach Satz 22 aus Vortrag 6 gilt aber auch

$$\prod_{p|m} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^{f(p)s}}\right)^{g(p)}} = \prod_\chi L(s, \chi)$$

und es folgt die Behauptung.

Nun noch $L(1, \chi) \neq 0$ falls $\chi \neq 0$: Wir werden später sehen, dass $\zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_m)}(s)$ einen einfachen Pol an der Stelle $s = 1$ hat. Nach Vortrag 7 hat auch $L(s, 1)$ einen einfachen Pol bei $s = 1$, während $L(s, \chi)$ holomorph in $s = 1$ ist für $\chi \neq 1$. Daher muss $L(1, \chi) \neq 0$ für $\chi \neq 1$ gelten. $\square$

Schreibt man die partielle Zetafunktion $\zeta(\mathfrak{K}, s)$ als Dirichletreihe

$$\zeta(\mathfrak{K}, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} = \sum_{\nu \ge 1} \frac{a_\nu}{\nu^s},$$

so gibt a_ν offenbar die Anzahl der Ideale $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$ mit Norm $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \nu$ an und für die Partialsumme $A_\nu = \sum_{\mu \le \nu} a_\mu$ gilt $A_\nu = j(\mathfrak{K}, \nu)$, wobei $j(\mathfrak{K}, \nu)$ die Anzahl der Ideale $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$ mit Norm $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \le \nu$ bezeichne.

Wir erinnern an Satz 12 aus Vortrag 6, allerdings mit einer zusätzlichen Aussage zum Residuum:

Satz 4. *Sei* $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *komplexe Folge und* $0 \leq \sigma_1 \leq 1$, *so dass es* $\rho \in \mathbb{C}, C \geq 0$ *gibt mit*

$$A_\nu = \nu\rho + O(\nu^{\sigma_1}),$$

hierbei sei $A_\nu := \sum_{\mu\leq\nu} a_\mu$. *Dann lässt sich die für* $\sigma > 0$ *durch die Dirichlet-Reihe*

$$f(s) = \sum_{\nu\geq 1} \frac{a_\nu}{\nu^s}$$

definierte Funktion analytisch auf die punktierte Halbebene $\{s \in \mathbb{C} - \{1\} \mid \operatorname{Re} s = \sigma > \sigma_1\}$ *fortsetzen. In* $s = 1$ *hat* $f(s)$ *einen einfachen Pol mit Residuum* $\operatorname{res}_{s=1} f(s) = \rho$.

Beweis. Die Aussage über das Residuum wurde noch nicht bewiesen. In Vortrag 6 wurde $\operatorname{res}_{s=1} \zeta(s) = 1$ gezeigt. Nach Resultaten von Vortrag 6 ist $f(s) - \rho\zeta(s)$ analytisch auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_1\}$ und es folgt die Behauptung. □

In Vortrag 7 wurde gezeigt $j(\mathfrak{K}, t) = \rho_\mathfrak{m} t + O(t^{1-1/n})$ mit einer positiven reellen Zahl $\rho_\mathfrak{m}$. Diese hängt nur von $\mathfrak{m}$, nicht aber von $\mathfrak{K}$ ab; siehe auch Vortrag 9. Damit erhalten wir

Satz 5. $\zeta(s, \mathfrak{K})$ *und* $\zeta_k(s, \mathfrak{m})$ *sind analytisch in* $\left\{s \in \mathbb{C} - \{1\} \;\middle|\; \sigma > 1 - \frac{1}{n}\right\}$ *und haben beide einen einfachen Pol bei* $s = 1$ *mit Residuen* $\operatorname{res}_{s=1} \zeta(s, \mathfrak{K}) = \rho_\mathfrak{m}$ *beziehungsweise* $\operatorname{res}_{s=1} \zeta_k(s, \mathfrak{m}) = h_\mathfrak{m}\rho_\mathfrak{m}$.

Beweis. Folgt direkt aus der Asymptotik von $j(\mathfrak{K}, \nu)$ und Satz 4. □

Vergleichen wir $\zeta_k(s, \mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{1}{1-\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}}$ mit $\zeta_k(s) = \zeta_k(s, 1) = \prod_\mathfrak{p} \frac{1}{1-\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}}$, so erhalten wir

$$\zeta_k(s) = \zeta_k(s, \mathfrak{m}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}$$

und können somit die Residuen $\rho := \rho_1$ und $\rho_\mathfrak{m}$ in Beziehung setzen, es gilt

$$h\rho = h_\mathfrak{m}\rho_\mathfrak{m} \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}}.$$

Da sich $\zeta_k(s)$ von $\zeta_k(s, \mathfrak{m})$ nur durch das endliche Produkt $\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}$ unterscheidet und dieses in $s = 1$ holomorph und verschieden von 0 ist, haben $\zeta_k(s)$ und $\zeta_k(s, \mathfrak{m})$ dieselbe Polstellenordnung in $s = 1$ und es folgt

Satz 6. *Es gilt*[1] $\log\zeta_k(s) \sim \log\zeta_k(s, \mathfrak{m})$ *und weiterhin*

$$\log\frac{1}{s-1} \sim \log\zeta_k(s) \sim \sum_\mathfrak{p} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} \sim \sum_{\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p}=1} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s},$$

hierbei bezeichne $f_\mathfrak{p}$ *den Trägheitsgrad von* $\mathfrak{p}$.

[1] $f \sim g$ bezeichne die Äquivalenzrelation $f(s) = g(s) + h(s)$ mit einer in einer Umgebung von $s = 1$ holomorphen Funktion $h(s)$.

Beweis. Es folgt alles aus den Vorbemerkungen sowie

$$\left| \sum_{\mathfrak{p}, f_{\mathfrak{p}} > 1} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} \right| \leq n \sum_{p} \frac{1}{p^{2\sigma}} < \infty \quad \text{für } \sigma > \frac{1}{2}. \qquad \square$$

2 L-Reihen

Sei $\chi : Cl^{\mathfrak{m}} \longrightarrow S^1$ ein Charakter der Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{m}$.

Definition 7. Unter der zu χ gehörigen L-Reihe verstehen wir das Produkt

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) := \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}}.$$

Für $\chi = 1$ erhält man offenbar $L_{\mathfrak{m}}(s, 1) = \zeta_k(s, \mathfrak{m})$.

In völlig analoger Weise wie bei der Zetafunktion $\zeta_k(s, \mathfrak{m})$ beweist man die Konvergenz dieses Produkts sofern $\sigma > 1$; $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ ist also holomorph auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1\}$. Ebenso wie im Fall der Zetafunktion erhält man die Dirichletreihendarstellung von $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ (zunächst für $\sigma > 1$) in der Form

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{J}^{\mathfrak{m}} \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = 1}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s};$$

sortieren nach Klassen von $Cl^{\mathfrak{m}}$ liefert dann die weitere Darstellung

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) \zeta(s, \mathfrak{K}).$$

Satz 8. *Sei $\chi \neq 1$. Die Reihe $\sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$ konvergiert dann in der ganzen Halbebene $\left\{ s \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sigma > 1 - \frac{1}{n} \right\}$ und $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ ist holomorph in dieser Halbebene. Ferner stellt die Reihe $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ in der ganzen Halbebene dar:*

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = 1} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$$

Beweis. Wir schreiben $\sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) \zeta(s, \mathfrak{K}) = \sum_{\nu \geq 1} \frac{a_\nu}{\nu^s}$ als Dirichletreihe, so gilt

$$a_\nu = \sum_{\substack{(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = 1 \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \nu}} \chi(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K} \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \nu}} \chi(\mathfrak{a})$$

und für die Partialsumme

$$A_\nu = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K} \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq \nu}} \chi(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{K} \in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) j(\mathfrak{K}, \nu).$$

Es gilt $j(\mathfrak{K},\nu) = \rho_{\mathfrak{m}}\nu + O(\nu^{1-1/n})$, also

$$A_\nu = \rho_{\mathfrak{m}}\nu \sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) + \sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) O(\nu^{1-1/n}) = O(\nu^{1-1/n});$$

hierbei wurde die Orthogonalitätsrelation[1] $\sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) = 0$ benutzt. Wir können nun Satz 4 mit $\rho = 0$ anwenden und erhalten, dass $\sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$ auf die gelochte Halbebene $\left\{s \in \mathbb{C} - \{1\} \;\middle|\; \sigma > 1 - \frac{1}{n}\right\}$ analytisch fortsetzbar ist und in $s = 1$ einen einfachen Pol mit Residuum $\rho = 0$ hat, also auf die komplette Halbebene analytisch fortsetzbar ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung trifft dies auch auf $L_{\mathfrak{m}}(s,\chi)$ zu und die Dirichletreihe stellt $L_{\mathfrak{m}}(s,\chi)$ dort dar. □

3 Die zweite fundamentale Ungleichung

Wir wollen im folgenden L-Reihen benutzen, um das Zerlegungsverhalten von Primstellen in galoisschen Erweiterungen zu studieren. Insbesondere wird sich dabei ein alternativer analytischer Beweis der zweiten fundamentalen Ungleichung ergeben. Zur Erinnerung: Im algebraischen Teil hatten wir folgenden

Satz. *Sei* ${}^{K}\!/_{k}$ *eine galoissche Erweiterung so gilt:*

$$(C_k : N_{G_{K/k}} C_K) \leq [K : k]$$

Im folgenden sei:

- ${}^{K}\!/_{k}$ endlich galoissch mit $[K : k] = N$
- $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_k$ ein Primideal
- $\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{P}_i^e$
- $f = [{}^{\mathcal{O}}\!/_{\mathfrak{P}_i} : {}^{\mathcal{O}_k}\!/_{\mathfrak{p}}]$
- $S_{K/k} = \{\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_k \text{ prim mit } \mathfrak{p} \text{ in } K \text{ voll zerlegt}\}$
- $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$ ein Modul von k mit $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$ falls $\mathfrak{p}$ in K verzweigt
  ($\#\{\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_k$ prim und verzweigt in $K\} < \infty$)
- $\mathfrak{N}^{\mathfrak{m}} = \{\mathfrak{N}_{K/k}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K,\ (\mathfrak{a},\mathfrak{m}) = 1\}$
- $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^f \rightsquigarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \quad \forall \mathfrak{a} \in \mathcal{J}^1$

Es folgt:

- $N = r \cdot f \cdot e$ (Da ${}^{K}\!/_{k}$ galoissch alle unabhängig von i)
- $H_0^{\mathfrak{m}} \subseteq H_0^{\mathfrak{m}}\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$
- $\mathfrak{p}$ voll zerlegt $\Leftrightarrow n = r \Leftrightarrow \exists_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$ mit $\mathfrak{P}_i \cap \mathcal{O}_k = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p}$ unverzweigt $\wedge\, \mathfrak{p} \in \mathfrak{N}^1$

Im folgenden betrachten wir die Faktorgruppe

$${}^{\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}}\!/_{H_0^{\mathfrak{m}}\mathfrak{N}^{\mathfrak{m}}}.$$

[1] Ist $\chi \neq 1$, so gibt es $\mathfrak{K}'$ mit $\chi(\mathfrak{K}') \neq 1$ und es ist dann $\chi(\mathfrak{K}') \sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}'\mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K})$, also $\sum_{\mathfrak{K}\in Cl^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{K}) = 0$

Definition 9. Der Index $h_{\mathfrak{m}} = (\mathcal{J}^{\mathfrak{m}} : H_0^{\mathfrak{m}}\mathfrak{N}^{\mathfrak{m}})$ heißt Norm-Index (mod $\mathfrak{m}$).

Bevor wir die zweite fundamentale Ungleichung beweisen können, brauchen wir noch eine kurze Vorbemerkung. Wir wissen bereits: Falls χ nicht trivial, so gilt $\sum_a \chi(a) = 0$. Analog gilt das folgende

Lemma 10. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe, $a \in G$. Dann gilt:*

$$\sum_{\chi \in \chi(G)} \chi(a) = \begin{cases} \#G & \textit{falls } a = 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Fall 1 folgt sofort aus $\#G = \#\chi(G)$. Für Fall 2 wähle $\psi \in \chi(G)$ mit $\psi(a) \neq 1$.

$$\Longrightarrow \sum_{\chi} \chi(a) = \sum_{\chi} \psi \circ \chi(a) = \psi(a) \sum_{\chi} \chi(a)$$

Da nun $\psi(a) \neq 1$ folgt $\sum_\chi \chi(a) = 0$ wie behauptet. $\square$

Nun steht alles bereit für:

Satz 11 (Universelle Norm-Index Ungleichung)**.** *Sei $\mathfrak{m}$ ein Modul mit $n_{\mathfrak{p}} > 0$ falls $\mathfrak{p}$ verzweigt in K. Dann gilt:*

$$h_{\mathfrak{m}} \leq [K : k]$$

(Genauer gilt sogar: $\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}} = [\tilde{K} : k]$ wobei $k \subseteq \tilde{K} \subseteq K$ der maximal abelsche Zwischenkörper ist.)

Beweis. Sei $H = H_0^{\mathfrak{m}}\mathfrak{N}^{\mathfrak{m}}$, $\chi \in \chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)$, $\chi \neq 1$ ein nicht trivialer Charakter. Dieser definiert einen Charakter auf $Cl^{\mathfrak{m}}$, durch

$$Cl^{\mathfrak{m}} \cong \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H_0^{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H_0^{\mathfrak{m}}\mathfrak{N}^{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*,$$

den wir ebenfalls mit χ bezeichnen. Betrachte nun die L-Reihe $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ zu diesem χ. Sei $m(\chi)$ die Nullstellenordnung von $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ bei $s = 1$. Da $\chi \neq 1$ folgt sofort $m(\chi) \geq 0$. (Es wird sich sogar gleich herausstellen $m(\chi) = 0 \ \forall \chi \neq 1$). Jedenfalls können wir schreiben

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = (s-1)^{m(\chi)} g(s, \chi)$$

mit $g(s, \chi)$ holomorph in 1 und $g(1, \chi) \neq 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \ln g(s, \chi) &\text{ holomorph bei } s = 1 \\ \Longrightarrow \ln L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) &= \ln((s-1)^{m(\chi)} g(s, \chi)) \\ &= m(\chi) \ln(s-1) + \ln(g(s, \chi) \\ &\sim -m(\chi) \ln \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Für $s = \sigma + it$ mit $\sigma > 1$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\ln L_{\mathfrak{m}}(s,\chi) &= \ln \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{1}{1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}} \\
&= \sum_{n,\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})^n}{n\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{ns}} \\
&\overset{\text{n=1}}{\sim} \sum_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} \\
&= \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H} \chi(\mathcal{R}) \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}
\end{aligned}$$

Wir können uns auf $n = 1$ einschränken, da die Summe über die restlichen Terme für $\sigma > \frac{1}{2}$ holomorph ist. Wir summieren nun über alle Charaktere $\chi \in \chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)$. Außerdem betrachten wir reelle $s > 1$. Unter Beachtung von $L_{\mathfrak{m}}(s,1) = \zeta_k(s,\mathfrak{m})$ und von Lemma 10 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\ln \zeta_k(s,\mathfrak{m}) + \sum_{\substack{\chi\in\chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)\\ \chi\neq 1}} \ln L_{\mathfrak{m}}(s,\chi) &= \sum_{\chi\in\chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)} \ln L_{\mathfrak{m}}(s,\chi) \\
&\sim \sum_{\chi\in\chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)} \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H} \chi(\mathcal{R}) \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} \\
&= \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H} \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} \underbrace{\sum_{\chi\in\chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)} \chi(\mathcal{R})}_{=\delta_{\mathcal{R},H}\#\chi(\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}/H)} \\
&= h_{\mathfrak{m}} \sum_{\mathfrak{p}\in H} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s}
\end{aligned}$$

Wir schreiben nun $a \gtrsim b$ falls $a(s) \geq b(s) + c$ für s nahe bei 1 mit einer von s

unabhängigen Konstanten c. Dies ergibt unter Beachtung von $\ln \zeta_k(s, \mathfrak{m}) \sim \ln \frac{1}{s-1}$:

$$
\begin{aligned}
(1 - \sum_{\chi \neq 1} m(\chi)) \ln \frac{1}{s-1} &\sim h_{\mathfrak{m}} \sum_{\mathfrak{p} \in H} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} \\
&\gtrsim h_{\mathfrak{m}} \sum_{\mathfrak{p} \in S_{K/k}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^s} && \#\{\mathfrak{p} \in S_{K/k} \setminus H,\ \mathfrak{p} \text{ prim}\} < \infty \\
&\gtrsim \frac{h_{\mathfrak{m}}}{N} \sum_{deg(\mathfrak{P})=1} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{P})^s} && {\scriptstyle \mathfrak{N}(\mathfrak{P})=\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \wedge} \\
& && {\scriptstyle \exists \text{ genau N } \mathfrak{P}/\mathfrak{p}} \\
&\sim \frac{h_{\mathfrak{m}}}{N} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{P})^s} && {\scriptstyle deg(\mathfrak{P})>1} \\
& && {\scriptstyle \Rightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \geq \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^2} \\
&\sim \frac{h_{\mathfrak{m}}}{N} \zeta_K(s) \\
&\sim \frac{h_{\mathfrak{m}}}{N} \ln \frac{1}{s-1}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt aber nun:

$$(1 - \sum_{\chi \neq 1} m(\chi)) \geq \frac{h_{\mathfrak{m}}}{N}.$$

Da alle vorkommenden Variablen positiv sind kann dies nur erfüllt sein für $m(\chi) = 0$ $\forall \chi \neq 1$ und $h_{\mathfrak{m}} \leq N$. Dies zeigt die gewünschte Behauptung. □

Um nun die zweite fundamentale Ungleichung zu folgern, erinnern wir uns an

Satz. *Ist* $\mathfrak{m}$ *zulässig so gilt:*

$$C_k / \mathcal{N}_k^K C_K \cong J_k / k^* \mathcal{N}_k^K J_k \cong \mathcal{J}^{\mathfrak{m}} / H_0^{\mathfrak{m}} \mathfrak{N}^{\mathfrak{m}}$$

Korollar 12. *Sei* K/k *galoissch vom Grade N, dann gilt:*

$$(C_k \colon \mathcal{N}_k^K C_K) \leq N \wedge (J_k \colon k^* \mathcal{N}_k^K J_K) \leq N$$

Beweis. Wähle $\mathfrak{m}$ zulässig und wende Satz 11 an. □