Prüfungsbericht Statistik

Datum: 12.2.2008
Prüfer: Dahlhaus
Note: 1.0
Prüung: Vordiplom (Mathematik)

F: Erklären Sie einmal die Exponentialverteilung
A: Verteilungsfunktion ?
F: Wen Sie möchten...
A: Also die Wahrscheinlichkeit ist: $p(x) = e^{-\lambda x}$, jetzt muss man das Ganze noch normieren, wenn ich mich recht entsinne mit $\frac{1}{\lambda}$
F: Das ist jetzt aber nicht die Verteilungsfunktion...
A: Da haben Sie recht, das ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, die Verteilung ist dann das Integral darüber
F: Kennen Sie den Erwartungswert?
A: Auswendig jetzt nicht aber den kann ich ausrechnen...
F: Wenn Sie das können dann machen Sie das doch
A: Also wir integrieren: $\int xp(x) = \int xe^{-\lambda x}$
Hm, hier müsste ich jetzt partiell integrieren um das x wegzubekommen, das dauert 2 Minuten, soll ich das schnell machen?
F: Nein, aber sagen Sie mal was die Integrationsgrenzen sind!
A: Also hier jetzt 0 bis ∞, eigentlich aber ganz $\mathbb{R}$, die Dichte ist nicht ganz richtig definiert. Eigentlich müsste da stehen: $p(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Theta(x)$
F: Das versteht ich jetzt nicht?
A: Aehm, die Heavyside Funktion, kenne ich so aus der theoretischen Physik, 1 für x größer 0, 0 sonst
F: OK, also ich gebe Ihnen jetzt mal den Erwartungswert an *(habe aber schon wieder vergessen was es war)*, neben dem Erwartungswert gibt es dann noch die Varianz?
A: Also die Varianz ist selbst über einen Erwartungswert definiert: $Var(X) = E(X - E(X))$
F: Das stimmt jetzt so nicht ganz aber ich glaube es ist nur ein Flüchtigkeitsfehler... *(ich habe dann das Quadrat ergänzt)*, kommen wir mal zu einem anderen Thema. Kennen Sie den Zentralen Grenzwertsatz?
A: Ja, der Satz besagt in Worten einfach, dass jede Verteilung im Mittelwert geeignet normiert in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert. Also $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$
F: Was heist in Verteilung?
A: Das die Verteilungsfunktion konvergiert
F: Und was ist das für eine Konvergenz? Etwa gleichmäßig?
A: Also auf keinen Fall gleichmäßig, dass muss ja nicht stetig sein..... Einfach punktweise Konvergenz.... Und das auch nur an allen Stetigkeitspunkten

F: Sie haben die Konvergenz in Verteilung erwähnt, welche Arten gibt es noch?
A: In der Vorlesung hatten wir noch die stochastische Konvergenz und die Konvergenz im quadratischen Mittel
F: Wissen Sie ob eine der beiden aus der anderen folgt?
A: Aus Konvergenz im quadratischen Mittel folgt stochastische Konvergenz und daraus folgt Konvergenz in Verteilung. Die Umkehrung gilt in beide Richtungen nicht
F: Kennen Sie vielleicht ein Gegenbeispiel?
A: Hm also z.B. bei der Konvergenz in Verteilung. Wenn man eine symmetrische Verteilung wie z.B. die Normalverteilung nimmt. Diese konvergiert in Verteilung gegen ihr negatives aber natürlich nicht stochastisch
F: Und kennen Sie für den anderen Fall auch ein Gegenbeispiel?
A: Hm, da müsste ich jetzt etwas konstruieren... Also wir nehmen eine diskrete Verteilung... Sagen wir im n-ten Folgenglied sei die Wahrscheinlichkeit für n^2 als Ergebnis $\frac{1}{n}$, ansonsten komme 0 heraus. Verstehen Sie was ich meine? *(er nickte).* Das konvergiert stochastisch gegen konstant 0, denn die Wahrscheinlichkeit das etwas ungleich 0 rauskommt ist $\frac{1}{n}$. Aber im quadratischen Mittel kommt im Erwartungswert $n^2 \cdot \frac{1}{n}$ vor, das wird definitiv nicht konstant 0
(Ich erwähnte noch irgendwie dass man die eine Richtung (quadr. Mittel $\Rightarrow$ stochastisch) mit der Tschebyscheff Ungleichung beweist. Er fragte glaube ich dann wo man die Ungleichung noch brauche, (Schwaches gesetz der großen Zahlen) wollte da aber keine Beweise sehen)
F: Über welches Thema würden Sie denn gerne noch reden, also von den Kapiteln ganz am Anfang würde ich natürlich gerne absehen *(Sehr zuvorkommend :|)*
A: *(Nach kurzem Überlegen)* Vielleicht über Kovarianz?
F: Dann erklären Sie doch was Kovarianz ist!
A: Also die Kovarianz betrifft mehrdimensionale Verteilungen. Man misst damit in etwa die Abhängigkeit der Zufallsvariablen untereinander. Es ist eine symmetische Matrix und der i, jte Eintrag ist: $E(XY) - E(X)E(Y)$. Das ist irgendwie äquivalent zu $E((X - E(X) \cdot (Y - E(Y))$. Man sieht sofort, dass es in X und Y symmetrisch ist. Für $X = Y$ erhält man die Varianz.
F: Jetzt haben Sie gesagt, dass hat mit der stochastischen Unabhängigkeit zu tun. Sind zwei Variablen denn unabhängig wenn die Kovarianz 0 ist?
A: Nein, davon gilt allerdings die Umkehrung, das sieht man sofort an der Definition.
F: Gibt es denn Fälle bei denen aus unkorelliert unabhängig folgt?
A: z.B. bei der multivarianten Normalverteilung
F: Können Sie das beweisen?
A: Also wir schauen uns die Verteilungsfunktion an. Mit irgendeiner Normierung a und einer anderen konstanten b sieht die dann so aus:
$f(x) = a \cdot e^{\,b \,\cdot\, x' \,\Sigma\, x}$

F: Das ist zwar schon ziemlich grob aber machen Sie mal weiter

A: Naja also die Normierung ist dann eben noch $1/\sqrt{2\cdot\pi}^n$ und dann noch die Determinante der Matrix...

F: Ja und im Exponenten muss ein Minus stehen!

A: Sonst würde das ja nicht konvergieren. Zumindest wenn die Variable unkorelliert sind ist Σ eine Diagonalmatrix und damit faktorisiert die Wahrscheinlichkeitsdichte in die Marginaldichten

F: OK, Können Sie mir erklären was ein bedingter Erwartungswert ist?

A: Naja eben der Erwartungswert einer Zufallsvariablen falls man das Ergebnis einer anderen kennt. Sind die beiden unabhängig, bekommt man natürlich nichts neues. Man definiert eine bedingte Verteilung $f_{|Y=y} = f(x,y)/f_Y(y)$. Davon eben dann der Erwartungswert. Das interessante daran ist, dass der Erwartungswert selbst dann wieder eine Zufallsvariable (abhängig von Y ist).

F: Können sie einige Eigenschaften bedingter Erwartungswerte angeben?

A: $E(E(X|Y)) = E(X)$, $E(h(y)\cdot X|Y=y) = h(y)\cdot E(X|Y=y)$ *(Bin mir jetzt nicht mehr ganz sicher ob da noch was anderes im Skript stand. ich habe ihm das einfach angegeben, er wollte keine Beweise sehen)*

F: Wissen sie, wie man gut einen Schätzer für eine Variable X ausgehend von einer Variablen Y herleiten kann?

A: Also man will eine Funktion h so dass $MSE = E((X-h(Y))^2)$ minimal wird. Also den quadratischen Fehler minimieren. Da muss man jetzt irgendwie etwas einfügen damit man das gut umformen kann.....

F: Naja da kommt man glaube ich nicht so einfach drauf, den Trick muss man kennen

A: Also ich weis ja was rauskommt. Man erhält $MSE = E((???)^2 + E((h(Y) - E(Y|X))^2)$. Der erste Erwartungswert ist unabhängig von h und da quadratisch immer größer 0. Hier kann man also nichts machen. Man muss also den zweiten Term minimieren also $h(Y) = E(Y|X)$.

F: Das stimmt jetzt so nicht ganz

A: Hm, ja man muss $E(Y|X)$ in $E(X|Y)$ ändern, das muss ja auch von y abhängig sein. *(Es konnte nur anderes herum sein, vorher war ich mir nicht ganz sicher und hatte eben geraten daher war die Antwort hier klar)*

F: OK... Naja wir können ja noch was zu Tests machen *mussta ja sein...*

A: Neyman Pearson Lemma?

F: Ja OK, erklären Sie das vielleicht erst einmal

A: Also ich kann Ihnen das Beispiel aus dem Skript vorführen... *(Habe dann eben das mit den Medikamenten zitiert, das war ihm dann aber doch nicht handfest genug. Ich weis jetzt auch die Formeln nicht mehr ganz genau auswendig, ich habe dann den Likelyhood-Quotionenten L definiert. Test ist dann eben positiv falls $L(k) > b^*$ und b^* eben so gewählt dass die entsprechende Wahrscheinlichkeit $> \alpha$. Falls L monoton in k ist kann man das dann vereinfachen in $k > k^*$. Für diskrete Variablen ist evtl solch ein k^* nicht immer zu finden (randomisierte Tests). Fehler 1. und 2. Art habe ich auch noch erwähnt)*

F: Dann gehen Sie doch bitte mal kurz vor die Tür

Ich war ehrlich gesagt überrascht, dass die 30 min schon vorbei waren. Nach der Uhr waren jedenfalls 30 min vorbei wobei ich mir nicht sicher bin ob wir rechtzeitig angefangen hatten. Die Prüfung war sehr angenehm. Besonders da Tests nur am Rande und Konfidenzintervalle gar nicht vorkamen. Der Rest war eigentlich nicht wirklich schwer, allerdings bin ich mit der Prüfung im 6. Semester wohl auch etwas spät. Vorbereitung war etwa eine Woche vor der Prüfung. So intensiv wie dies eben im Semester möglich war. Dahlhaus sieht gerne über kleine Fehler oder Ungenauigkeiten hinweg, so lange er das Gefühl hat, man hat den Zusammenhang verstanden und kann mit etwas Nachdenken dann nachbessern.