Vordiplomsprüfung Mathematik
Studiengang: Physik/Diplom
Datum: 29.8.2006
Prüfer: Freitag
Note: 1,0

Professor Freitag meinte er wüsste inzwischen gar nicht mehr mit was er denn anfangen sollte, aber eine streng mathematische Einführung des Integrals hätten sie bis jetzt noch nicht gehabt, das könnte ich doch mal machen.

A: Regelintegral geht in Ordnung?
F: Irgendeins, das ist mir gleich.
A: Dann nehmen wir doch das Regelintegral: Hier müssen wir zuerst einmal eine Treppenfunktion definieren.
F: Ok ist akzeptiert
A: Dann definieren wir eine Regelfunktion als eine Funktion f, so dass es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.
F: Auch akzeptiert, aber jetzt sagen Sie mal, wie das Integral denn definiert ist, und damit wir uns gleich richtig verstehen: Ich weis wie das Integral einer Treppenfunktion definiert ist. *(Also doch nicht streng mathematisch oder wie?)*
A: Naja, dann definieren wir das Integral der Regelfunktion als Limes der Folge der Integrale der Treppenfunktionen. *(Hab das dann zum ersten mal aufschreiben müssen)*
F: Ja das ist soweit richtig, und was müssen wir jetzt noch zeigen damit wir das so definieren können, und was kommt dabei heraus
A: Existenz und Eindeutigkeit. Beides ist natürlich gegeben sonst wäre das ja eine ziemlich schwachsinnige Definition. *(Obwohl er da doch sicher mehr hören will)*
F: Ja natürlich ist beides gegeben. Die Eindeutigkeit schenke ich ihnen, dann zeigen sie doch bitte mal die Existenz
A: *(Irgendwie wusste ich nicht genau wie ich das jetzt zeigen sollte, muss das wohl des öfteren beim Durchlesen des Scripts übergangen haben…)*
F: Überlegen sie doch mal welche Konvergenzkriterien es gibt!
A: Majorantenkriterium z.B.
F: Nein
A: Aehm, Moment mal, es gibt doch das Majorantenkriterium*? (Irgendwie wurde mir immer noch nicht bewusst, das ich gerade Reihen und Folgen verwechselte)*

(*Prof. Freitag sah ziemlich entsetzt aus, zum Glück wurde mir dann klar was ich gerade gesagt hatte, mir fiel dann auch noch der Beweis ein, das geht irgendwie nur Gut mit dem Cauchy-Kriterium und das Freitag so was fragt nachdem er Cauchy-Folgen doch offenkundig nicht für so wichtig hält… :|)*

A: Oh mein Gott bin ich dämlich…
F: (Nickt zustimmend) Da haben sie recht
A: Majoranten… ist natürlich für Reihen, das hier ist ja eine Folge, das müsste mit dem Cauchy-Kriterium gehen.
F: Ja dann schreiben sie das doch mal auf
A: *(Ich habe den Beweis dann etwa wie im Script (denke ich) aufgeschrieben)*
F: Ja, so ist das richtig, aber da sie da gerade so unsicher waren möchte ich sie aus der Konvergenz noch nicht entlassen. Was ist denn nun das Majorantenkriterium und welche Kriterien gibt es noch?

A: Habe ihm das Majorantenkriterium erklärt und kurz das Quotientenkriterium angesprochen.

F: Ich gebe ihnen mal eine Reihe, dann untersuchen sie mal ob sie konvergiert: $1/x^2$

A: Also ich weis hier schon im Voraus das die Reihe konvergiert. Versuchen wir doch mal mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz zu zeigen wo wir doch gerade darüber geredet haben.

F: Das können sie versuchen aber ich sage ihnen gleich: das klappt nicht

A: Dann geht wohl das Quotientenkriterium auch nicht, das ist ja eine Folgerung aus dem Majorantenkriterium.

F: Ja das ist richtig aber es gibt ja noch andere Konvergenzkriterium

A: Hm da währe z.B. noch das Wurzelkriterium aber das ist ja wieder das gleiche wie beim Quotientenkriterium.

F: Also mit dem Vergleich mit der harmonischen Reihe kommen sie hier nicht weiter, denken sie doch mal daran mit was wir vorhin angefangen haben!

A: *(Jetzt wurde es mir klar)* Ah, natürlich, Integralvergleichskriterium

F: Genau, das ist eigentlich eines wenn nicht das wichtigste Kriterium überhaupt. Wie wenden sie das jetzt an?

A: Wir nehmen einfach die Funktion $1/x^2$, Integral ist $-1/x$ und das Konvergiert natürlich.

F: Und wie sieht es mit der Reihe über $1/x$ aus?

A: Konvergiert nicht denn das Integral von $1/x$ ist der Logarithmus und der geht ja gegen unendlich.

F: Genau, dann gehen wie jetzt mal zu Analysis II über. Ich geben ihnen mal eine Funktion die sie dann bitte ableiten. Also ich mache folgendes: Ich nehme eine Funktion g: $R^3 \rightarrow R^2$ und eine Funktion h: $R^2 \rightarrow R$. $g(x, y, z)$ sei $(x^2 + xy, y^2 + xy)$ Jetzt definiere ich eine Funktion $f(x, y, z)$ als $h(g(x,y,z))$. Dann hätte ich gerne die Ableitung von h. (Er hat das dann auch aufgeschrieben)

A: Moment ich muss nur schnell die Jacobi Matrizen aufstellen. *(Ich schrieb halt die Jacobi - Matrizen aufs Blatt)*, hier bei h müssen wir jetzt neue Variablen einführen nach denen wir ableiten, ich nenne sie mal x_1, x_2.

F: Und was ist jetzt die Ableitung von f?

A: Kleinen Moment, ich muss die Matrizen noch ausmultiplizieren. *(Da kam dann auch das richtige raus, und ja, ich weis dass es auch schneller geht…)*

F: Jetzt könnte man sich natürlich die Frage stellen, warum man einfach die Jacobimatrizen multiplizieren darf, können sie da was drüber sagen?

A: Naja das besagt die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher, am besten zeigt man das so. Wir schauen uns zuerst einmal die Definition der Ableitung an: $g(x) = g(a) + J(g, a)\,(x – a) + R(x)$, $h(x) = h(b) + J(h, b)\,(x – b) + R(x)$.

F: Ja so habe ich das in der Vorlesung definiert. *(Ich wusste doch das ihm diese Herangehensweise gefällt :|)*

A: Hier muss man jetzt natürlich noch beachten dass die beiden x verschieden sind und müsste dann noch die entsprechenden Stellen…

F: Ja lassen sie das mal, wir denken uns einfach die Stellen seien immer passend gewählt.

A: Dann setzen wir jetzt einfach die eine Definition in die andere ein und… *(Wollte mit dem anfangen was da bei ihm im Script steht, hatte mir das zufällig an dem morgen noch durchgelesen und war mir ziemlich sicher das gut hinzubekommen)*

F: Das soll mir jetzt reichen das die Ableitung eine lineare Approximation ist die man ineinander einsetzt. Sagen sie mal, wenn ich etwas mehr als lineare Approximation haben will, was kann ich denn dann tun?

A: Dann muss man Taylor-Entwickeln. Befinden wir uns denn noch in der Analysis mehrer Veränderlicher?

F: Ja, natürlich.

A: *(Na dann also die Formel für mehrere Veränderliche. Ich schrieb die Formel für die Taylor-Reihe auf, sprach kurz an das man dazu wissen müsste wie die Multiindizes definiert sind aber er winkte ab)*

F: Und wann genau konvergiert die Reihe jetzt gegen meine Funktion?

A: *(Ich fing an die Formel für das Restglied (zuerst in mehreren Veränderlichen) aufzuschreiben).* Können wir hier vielleicht die eindimensionale Formel betrachten, das ist ja im Prinzip dasselbe weil man im Mehrdimensional ja nur eine Richtung einsetzt aber ich denke dann sieht man besser war passiert.

F: Ja, das können sie machen.

A: *(Also schrieb ich die eindimensionale Formel hin, war mir auch lieber weil ich mir da sicherer war).*

Das kann man jetzt ganz einfach beweisen indem man zuerst den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung anwendet und dann n-fach partiell integriert.

(Darüber wollte Freitag nicht weiter eingehen, aber mir viel auf das sich der Beisitzer wohl notierte das ich den Beweis erwähnt hatte. Irgend wie wollte ich hier zeigen das ich den Beweis kann, nachdem das mit der Konvergenz des Integrals nicht so ganz geklappt hatte und ich auch recht lange für die Kettenregel gebraucht habe)

Also gut, wir wissen das die Taylor-Formel mit Restglied exakt ist, d.h. falls das Restglied gegen 0 geht muss die Reihe gegen die Funktion konvergieren.

F: Können sie denn abschätzen wann das Restglied gegen 0 geht?

A: Also die einfachste Abschätzung ist wohl möglich falls die Folge der Ableitungen beschränkt ist. Dass ist zwar eine recht gravierende Einschränkung aber sie trifft doch für viele Funktionen zu.

F: Ja, aber damit fordern sie wirklich viel mehr als sie eigentlich brauchen. *(Er ging dann aber nicht weiter darauf ein, ich habe ehrlich gesagt auch keine Ahnung, ob er da zuerst etwas anderes hören wollte.)*

Kennen sie denn Fälle in denen man die Taylor - Entwicklung nicht anwenden kann?

A: Ich kenne das Beispiel, das sie in der Vorlesung behandelt haben: $\exp(-1/x^2)$

Hier lässt sich zeigen, dass jede Ableitung im Nullpunkt gleich null ist, die Taylorreihe also gegen die 0-Funktion konvergiert.

F: Ja genau,… *(Er erzählte ein wenig über die Funktionen, z.B. das die höheren Ableitungen in der Nähe des Nullpunktes „explodieren“ müssen)*

So wir haben jetzt noch 5 Minuten, da müssen wir noch etwas Algebra machen. Nehmen wir an ich gebe ihnen eine Reelle Symmetrische Matrix, was kann man damit machen?

A: Diagonalisieren

F: Können sie das irgendwie etwas motivieren?

A: Also das ist genau die Aussage des Spektralsatzes, ich werde mal Versuchen das in den 5 Minuten noch zu beweisen. *(Ich war echt froh das er hier noch ein etwas komplexeres Thema fragte mit dem ich als Physiker schon viel zu tun hatte, so wird das evtl. doch noch was mit der 1,0:|)*

F: Dann fangen Sie mal an!

A: *(Im Prinzip habe ich den Beweis aus dem Script vorgetragen, wobei er mich bei fast jeder Stelle unterbrach und sagte ich sollte das Überspringen. Das einzige worauf er genauer einging, war wie denn die Diagonalmatrix dann genau entsteht. Also das ein Eigenvektor auf sich selbst abgebildet wird und das Orthogonale Komplement auf sich selbst und es dann im Orthogonalen Komplement wieder einen Eigenvektor gibt usw. Während des Beweises fragte er noch nach, warum ich denn da ein Skalarprodukt benutze, er hätte mir gar keines vorgegeben. Ich wusste irgendwie nicht genau was er* *von mir wollte, er war dann aber zufrieden als ich das euklidische Skalarprodukt definierte.)*

F: Gehen sie dann mal bitte kurz raus.

Der Assistent (der übrigens während der ganzen Prüfung nichts gesagt hatte) rief mich dann wieder herein. Freitag erzählte mir das der Anfang ihn schon sehr schockiert habe. (Ich habe wohl bei dem Konvergenzbeweis auch etwas länger gehangen, als es hier den Anschein hat) Danach sei es allerdings sehr gut gewesen und er hätte mir eine 1 gemacht. Was ihn noch etwas verwundert hat, sei das ich für die Kettenregel so lange gebraucht habe, da ich doch Physiker sei.

Vorbereitung:
Lineare Algebra etwa 2 Wochen aber ziemlich locker, alle paar Tage mal 1-2 Stunden. Hier fand ich Freitags Skript sehr flüssig lesbar, während ich in der Vorlesung mit LA wesentlich mehr Probleme als mit Analysis hatte. Analysis dann die Woche vor der Prüfung ziemlich umfangreich, also vielleicht 8-10 Stunden pro Tag, direkt vor der Prüfung habe ich dann noch mal 2 Tage alles wiederholt.