Prüfungsbericht zur Vordiplomsprüfung im Studiengang Mathematik
Prüfer: Freitag
Note: 1,0
Datum: 17.10.2007

Bei der Vorbereitung fiel mir auf, dass kaum Berichte zur Lebesque Integration bzw. zur Analysis 3 existieren. Also hier einen Bericht über den entsprechenden *(letzten Teil)* meiner Prüfung.
Das was ich hier jetzt an mathematischen Formeln angebe entspricht *(glaube ich)* so in etwa dem was ich in der Prüfung alles geschrieben habe.

F: Was können Sie uns denn über die Integration im Mehrdimensionalen erzählen?

A: Was genau wollen Sie hören? Lebesque Integral? *(konnte ich gut also dachte ich, ich erwähne es gleich mal)*

F: Fangen Sie doch am Anfang an

A: Also zuerst brauchen wir einmal ein Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger, hier nimmt man jetzt je nach belieben das Regel- oder das Riemann Integral.
(Eigentlich sind wir ja schon bei Analysis 2 also dachte ich er will das nicht mehr so genau hören)

F: Aber ich habe ja nach Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher gefragt...

A: Das definiert man dann einfach iterativ. Das Cavalierische Prinzip sagt ja man kann einfach beliebig orthogonale Achsen integrieren.

F: Erklären sie das bitte genauer!
(Habe das wohl irgendwie missverständlich ausgedrückt dann)

F: Nein nein warten Sie mal, nehmen Sie einfach eine Funktion und erklären Sie die Definition!

A: Also sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit kompaktem Träger. Dann erklärt man:

$$\int f(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(... \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_n \right) ... \right) dx_2 \right) dx_1$$

Löst man nun die innerste Klammer auf so erhält man eine Funktion die nicht mehr von x_n abhängt:

$$\int f(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(... \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) dx_{n-1} \right) ... \right) dx_2 \right) dx_1$$

Die Integrale sind aufgrund des kompakten Trägers natürlich immer endlich. Jetzt muss man noch zeigen, dass das Integral unabhängig von der Integrationsreihenfolge ist.

F: Und was müssen Sie noch zeigen?

A: *(Kurze Pause...)* Das wenn man das erste Integral auflöst die resultierende Funktion F wieder stetig ist. Das sollte doch aber *(hoffentlich)* aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung folgen, da die Stammfunktion ja stetig diffbar und damit stetig ist.

F: Nein das tut es nicht...
(Schlecht geraten..... Ist natürlich per se erstmal diffbar in x_n Richtung was nichts über Stetigkeit in die andere Richtung aussagt....)

F: Prüfen Sie doch einfach das ϵ - δ - Kriterium nach

A: Ich gehe jetzt nur von 2 Variablen aus, dann is es kürzer zu schreiben. Wir können das Integral zuerst zusammenziehen:

$$\int f(x,y)dx - \int f(x,y_0)dx = \int f(x,y) - f(x,y_0)dx$$

Jetzt müssen wir den Integranten irgendwie abschätzen, z.B. $f(x,y) - f(x,y_0) < \epsilon$ da ja f stetig ist für y....

F: Nein das können Sie nicht so einfach...

(Wir haben da dann etwas diskutiert, irgendwie wusste ich nicht genau was er meinte. Am Ende stellte sich heraus er wollte nur hören dass f gleichmäßig stetig ist (als stetige Funktion auf kompaktem Träger). Allgemein muss man bei ihm wohl sehr auf Voraussetzungen achten und das auch selbstständig erwähnen. Nachdem er so entschieden sagte, dass würde so nicht gehen dachte ich zuerst er meinte die Abschätzung sei total falsch)

F: Sie haben gesagt, man muss zeigen, dass der Wert von der Integrationsreihenfolge unabhängig ist. Warum ist dass so?

A: Also das besagt der Satz von Fubini...

F: Aber der Satz von Fubini gilt ja algemein für Lebesque integrierbare Funktionen, da wollen wir doch erst noch hin?

A: Also zuerst benutzt man den Weierstrassschen Approximationssatz, dass man stetige Funktionen auf kompaktem Träger duch Polynome approximieren kann, und für Polynome ist die Vertauschung dann trivial.

F: Ja für Polynome ist dass klar. Das ist dann eine erste Vorstufe zum Satz von Fubini. Auch hier ist dann wieder wichtig dass man gleichmäßig durch Polynome approximieren kann.

(kann ich ja nichts dagegen sagen, nur wie konnte ich gleichmäßig schon wieder nicht erwähnen...)

F: Dann machen Sie doch weiter!

A: Nachdem wir jetzt das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger haben gehen wir als nächstes über zur Baireschen Klasse. In der Bairschen Klasse liegen Funktionen die man durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximieren kann, und zwar monoton. Das Integral definiert man dann einfach als das Supremum der Integrale der approximierenden Folge. Was man natürlich zeigen muss ist, dass das Supremum unabhängig von der Folge ist.

(Freitag überlegte dann glaube ich gleich weiter zu gehen, winkte auch bei der Unabhängigkeit gleich ab, der Beisitzer interessierte sich dann aber wohl noch etwas für die Bairsche Klasse)

F: Dann erklären Sie es doch kurz genauer!

A: Also wir betrachte eine Funktionenfolge $f_n \uparrow f$. Der Pfeil heist die Folge konvergiert gegen die Grenzfunktion f. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig sondern nur punktweise, aber eben monoton, d.h. $f_{n+1}(x) > f_n(x)\ \forall x$. Auf die gleichmäßige Konvergenz muss man leider verzichten, da man ja auch nicht stetige Funktionen integrieren will.

Alle Funktionen f für die solch eine Folge existiert liegen in der Bairschen Klasse B^+. Analog gibt es noch die Klasse B^- mit Funktionen die man von oben monoton approximieren kann. Jetzt ist leider B^+ kein Vektorraum, denn aus $f \in B^+$ folgt leider nicht $f \in B^-$ sondern nur $-f \in B^-$.

F: Und was gibt es uns jetzt neues, die Bairsche Klasse? Was wäre z.B. wenn wir eine Funktion hätten die im Durchschnitt von B^+ und B^- liegt.

A: Die wäre dann ja oberhalb- und unterhalbstetig und damit stetig. Interessant sind ja gerade unstetige Funktionen.

F: Dann geben sie bitte einmal ein Beispiel für eine Funktion die in B^+ liegt und nicht stetig ist.

A: Also z.B. f(x) = 1 für $0 \lneq$ x $\lneq 1$ und 0 außerhalb. An den Grenzen muss man die Funktion jetzt 0 oder 1 setzen je nachdem ob wir uns in B^+ oder in B^- befinden.

F: Ja das ist dann die Charakteristische Funktion des Einheitsintervals. Für welche Mengen liegt denn die Charakteristische Funktion in B^+

(Also prinzipiel dachte ich zuerst an alle abgeschlossenen, war mir da aber nicht sicher ob es nicht ein paar seltsame Probleme bei absurden Mengen geben könnte und dachte es sei sicherer einfach kompakte Mengen zu sagen)

F: Nein das stimmt so nicht, sehen Sie...

(Nach kurzer Diskussion stellte sich dann zu meiner überraschung heraus dass die abgeschlossenen in B^- liegen, die offenen in B^+. Wir redeten noch kurz etwas über die Randpunkte des Intervals. Tatsächlich ist wohl die charakteristische Funktion jeder offenen Menga in B^+. Das müsse man aber erst beweisen..)

A: Das hängt dann wohl damit zusammen dass der $\mathbb{R}^n$ abzählbare Basis der Topologie besitzt...

F: Ja irgendwie sowas und dann nehmen sie offene Kugeln und... aber lassen wir dass, gehen wir weiter zum Lebesque Integral.

A: Also wir betrachten jetzt eine belibige Funktion f. Jetzt definieren wir ein äußeres Integral:

$$\overline{\int} f = Inf\left\{ \int g \right\}$$

wobei g alle Bairschen Funktionen $g \geq f$ durchläuft und $\int$ das Bairsche Integral von vorhin ist.

F: Woher wissen Sie, dass dieses Infinum existiert?

A: Das liegt daran, dass die Funktion konstant unendlich bairsch ist.

F: Und wie sehen Sie das?

(Ich habe ein Bild immer größer werdender Dreiecksfunktionen gezeichnet, Freitag war damit zufrieden und ich konnte weiter über das Integral reden)

Als nächstes definieren wir nun das untere Integral

$$\underline{\int} f = -\overline{\int} -f$$

Wir nennen eine Funktion jetzt Lebesque integrierbar falls

$$\overline{\int} f = \underline{\int} f$$

F: Und was noch?

A: Das integral muss natürlich endlich sein

F: Gehen wir nun zu etwas anderem über... Wie ist denn eine Mannigfaltigkeit definiert.

A: Also der einfachste Begriff ist zunächst einmal der der parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten.

F: Dann definieren Sie bitte eine parametrisierbare Mannigfaltigkeit

(Nach etwas verwirrendem hin und her meinerseits meinte Freitag ich solle die Definition doch einfach jetzt mal sauber widerholen und zusammenfassen. Ist vermutlich echt einfacher in einer Prüfung das sauber aufzuschreiben. Ich habe da vorher ständig was geändert und nachgebessert an dem was ich gesagt habe. Also:)

A: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein topologischer Raum, wobei das topologisch kann man sich wohl schenken wenn es Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Nun sei $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine ...

F: Nein dass stimmt so schon wieder nicht ganz

(was is denn nun schon wieder Falsch...)

A: Oh, das Bild muss natürlich X sein und dann auch nicht aus dem ganzen $\mathbb{R}^m$
(Also jetzt nochmal ordentlich....)

$$Sei\ U \subseteq \mathbb{R}^m\ offen,\ X \subseteq \mathbb{R}^n,\ f:\ U \longrightarrow X\ topologisch\ und\ regulaer$$

dann heist X parametrisierbare Mannigfaltigkeit

F: Und was heist jetzt topologisch und regulär, wobei vergessen Sie topologisch...

A: Also regulär heist stetig differenzierbar und die Ableitung muss ungleich 0 sein, im Fall n $\gneqq$ 1 muss die Jacobimatrix vollen Rang haben

F: Und wozu brauchen wir jetzt topologisch, man könnte doch meinen dass nach dem Satz für umkehrbare Funktionen man das topologisch aus dem regulär erhält?

A: Der Satz für umkehrbare Funktionen gilt ja nur in einer kleinen Umgebung.

F: Kennen Sie vielleicht ein Gegenbeispiel für offene Mengen im $\mathbb{R}^n$.

A: *(Hat er jetzt unbedingt offen sagen müssen)*
Hm also man kann das halboffene Interval auf die Kreislinie abbilden aber das ist ja nicht offen.

F: Ja, es gibt auch für offene Gebiete Beispiele
(Irgendwie viel mir da jetzt spontan nichts passendes ein. Nach der Prüfung kam mir dann irgendwie der Gedanke man könnte das offene Interval auf die 8 abbilden... Freitag fragte dann jedenfalls ob ich den Torrusknеul (oder so) kennen würde. Wäre dann ein anderes Beispiel)

F: Belassen wir es dabei. Wie definiert man denn das Volumen einer eingebetteten Mannigfaltigkeit?

A: Also für eine eingebette Mannigfaltigkeit müssen wir dann noch ein wenig Vorarbeit leisten, wir brauchen die Zerlegung der....

F: Oh, entschuldigung, ich meinte parametrisierbare Mannigfaltigkeit

A: Dann betrachten wir eine reguläre Parametrisierung f von X und definieren uns eine neue Funktion:

$$g = J'(f)J(f)$$

Wir multiplizieren die inverse Jacobimatrix von f an die Jacobimatrix.

F: Sie meinen wohl die transponierte *(Da ich aber richtig J' geschrieben hatte hat er mich da wohl nur kurz verbessert)*

A: Und jetzt integrieren wir einfach darüber

$$Vol(X) = \int\limits_X g(x)dx$$

F: Jetzt schauen sie mal genau hin, Sie integrieren da über eine Matrix

A: Aber die Matrix stellt doch eine Funktion dar.

F: Aber Sie integrieren doch eine Matrix...

A: Man kann die Integration doch komponentenweise.... Oh wir wollen ja ein Volumen, da haben Sie Recht, das macht keinen Sinn, dann muss man die Determinante bilden und dann die Wurzel. *(Habe dann die Formel verbessert)*

$$g = \sqrt{det(J'(f,x)J(f,x))}$$

F: Dann könnte man sich jetzt noch fragen warum das Volumen nicht von der Parametrisierung abhängt

A: Nun wenn wir 2 Parametrisierungen f und h haben *(hatte zuerst g geschrieben aber dass dann verbessert weil die Hilfsfunktion ja g hieß)* können wir einen Diffeomorphismus ϕ definieren mit $f(x) = g(\phi(x))$, da beide topologisch und regulär sind. Jetzt erhalten wir zwei Funktionen, g_f und g_h. Aus der Kettenregel erhalten wir nun:

$$J(f) = J(g)J(\phi)$$

Jetzt können wir g_f durch g_h....

F: So genau müssen wir das jetzt nicht wissen...

A: Nun die Determinante von ϕ geht jetzt doppelt ein wegen der transponierten Matrix. Das wird aber genau durch die Wurzel aufgehoben. Und dann steht hier genau die Transformationsformel für n-fache Integrale

(Hatte gehofft dann mit dem Thema die Prüfung zu beenden, wie gesagt ich mag Integrationstheorie)

F: Ja, die Transformationsformel wollte ich hier noch hören, ich glaube wir können dann Schluss machen, gehen Sie bitte einmal kurz raus.

(Also doch keine Transformationsformel mehr...)

Also ich kann nur sagen Freitag ist ein sehr angenehmer Prüfer und ich würde jederzeit wieder hingehen. Wichtig ist ihm ein gutes Verständnis der Dinge und besonders der Voraussetzungen bei gleichmäßiger Konvergenz. (Hatte ich auch in der Vorlesung den Eindruck) Bei tiefergehenden Beweisen hat er nicht weiter nachgebohrt sondern war zufrieden wenn ich den entsprechenden Satz erwähnt habe. Beispiele für diverse Funktionen zu kennen ist sicherlich nicht verkehrt.